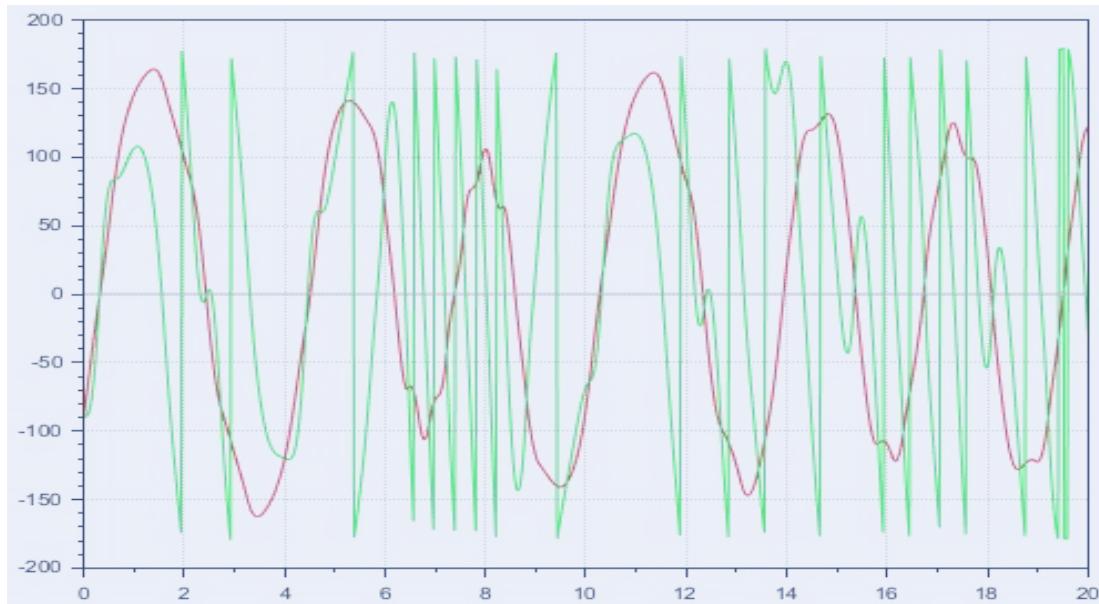


Dies und das zum Doppelpendel

Im Lagrange-Formalismus mit Scilab



Im Januar 2026

Bernd Ragutt

Inhaltsverzeichnis

1	Das ebene Doppelpendel im Schwerefeld.....	3
1.1	Die Newtonschen Bewegungsgleichungen.....	3
1.2	Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.....	5
1.3	Aufbereitung der Bewegungsgleichungen für Scilab.....	7
2	Das Energieverhalten der Scilab-Lösungen.....	9
2.1	Das Einfachpendel.....	9
2.2	Komplexeres Verhalten: Kreiseln.....	12
2.3	Das Doppelpendel.....	14
3	Die Stabilität der Scilab-Lösungen.....	20
3.1	Einfluss von Integrationsverfahren.....	20
3.2	Einfluss von Anfangsbedingungen.....	21
4	Literatur.....	23
	Etwas Anhang.....	24
A.	Quotientenmengen für Winkel.....	24
B.	Die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art.....	26
C.	Ausflug in die Zylinderkoordinaten.....	29
D.	Rund um den Drehimpuls.....	30
E.	Die Sonderfälle.....	32

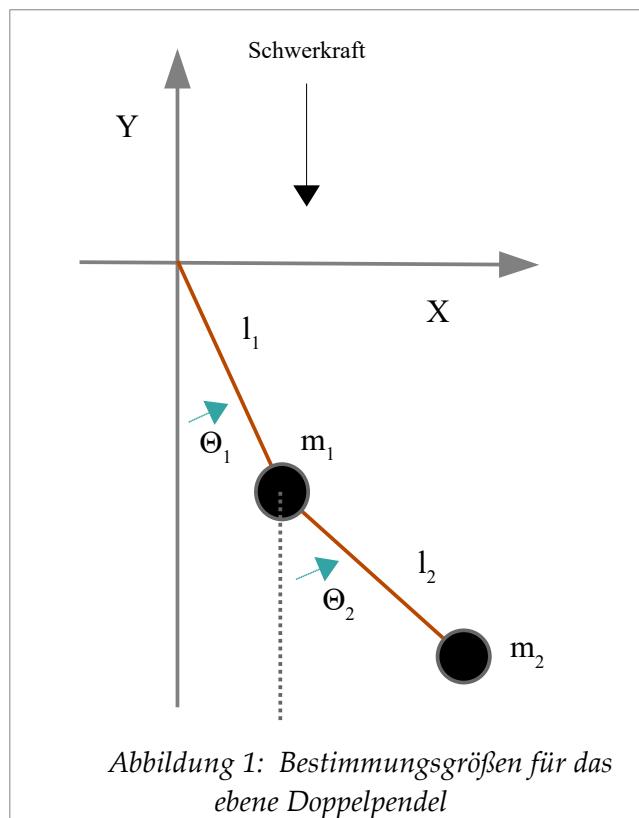
1 Das ebene Doppelpendel im Schwerefeld

1.1 Die Newtonschen Bewegungsgleichungen

Aus 2 Drehgelenken, 2 starren Stangen und 2 Massen sowie einem homogenen Scherefeld konstruiere ich gedanklich ein idealisiertes Doppelpendel auf eine Weise, dass die Massen ‚frei‘ in einer Ebene schwingen können.

Ich mache mir das Leben leicht und hantiere mit punktförmig gedachten Pendelkörpern, deren Massen also jeweils im Schwerpunkt konzentriert sein sollen. Die starren Verbindungen der Pendelmassen selbst sind masselos¹ gedacht.

Die Schwerkraft wirkt als einzige Kraft ‚nach unten‘, hier in der negativen Y-Richtung (siehe Abbildung 1); sie darf als konstant angenommen werden; $g=9,81 \text{ m/s}^2$ ist dabei die Gravitationskonstante. Die Corioliskraft, die durch die sich drehende Erde verursacht wird, und die Reibungskräfte, die durch die umgebende Luft und durch quietschende Drehgelenke entstehen würden, werden vernachlässigt.



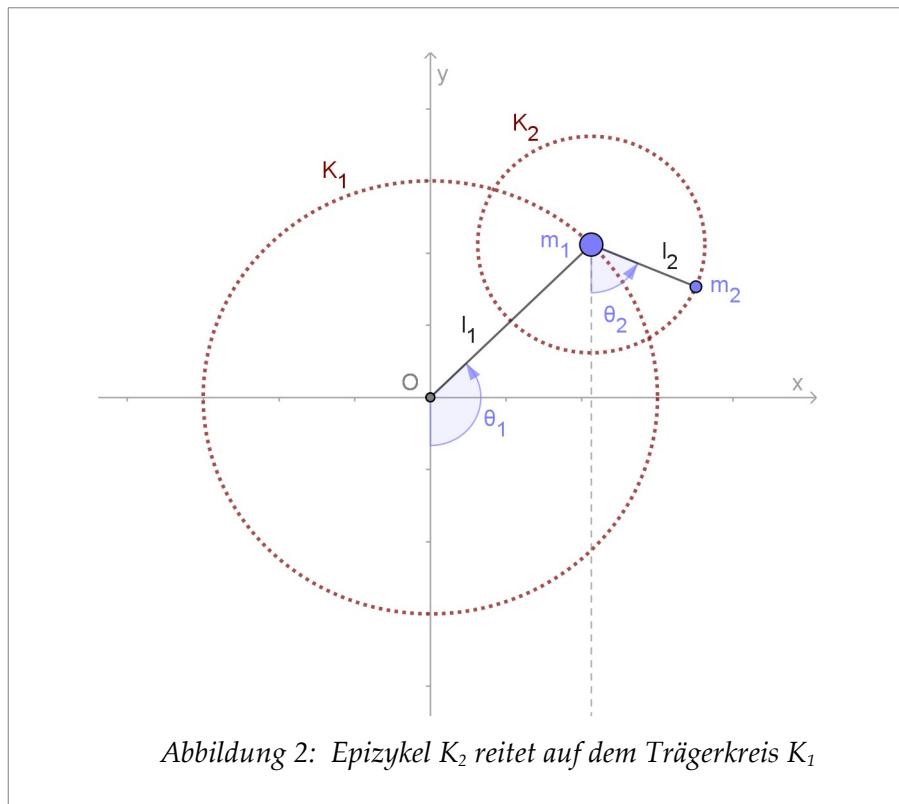
Das Koordinatensystem wird so aufgespannt, dass das ortsfeste Lager des Pendelsystems im Ursprung des Koordinatensystems liegt und die beiden Massen in der x-y-Ebene schwingen. Die y-Achse orientiert sich an der Richtung des Schwerkraft. Die dritte, nicht eingezeichnete z-Achse steht senkrecht auf den beiden anderen Achsen und ist auf den Betrachter gerichtet.

Die beiden Auslenkwinkel werden beginnend mit dem Wert 0° gegen die negative y-Richtung gemessen; das Vorzeichen eines Winkels ist positiv, wenn die Pendelmasse in Richtung der positiven x-Achse schwingt. Die Winkelwerte sind auf das Intervall $(-\pi, +\pi]$ beschränkt.

(1) Genauer: Die Massen der Verbindungselemente sind gegenüber den Pendelmassen m_i zu vernachlässigen.

<p>Die Newtonschen Bewegungsgleichungen der beiden punktförmigen Massen m_i ($i=1,2$) sind in kartesischen Koordinaten x_i, y_i, z_i ($i=1,2$) schnell aufgestellt.</p>	$\begin{array}{ll} m_1 \ddot{x}_1 = 0 & m_1 \ddot{z}_1 = 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g & \\ m_2 \ddot{x}_2 = 0 & m_2 \ddot{z}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g & \end{array}$
<p>Die kartesischen Koordinaten der beiden Pendelmassen erfüllen <i>für alle Zeiten</i> zwei Zwangsbedingungen, die die unveränderlichen, eben 'starren' Pendellängen festschreiben. Zwei weitere Zwangsbedingungen rüren das Problem als ein ebenes fest.</p>	$\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \\ z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array}$

Mit Worten ausgedrückt bedeuten diese Zwangsbedingungen: Die ‚obere‘ Masse m_1 bewegt sich auf einem in der räumlichen Lage fixierten Kreis K_1 mit dem Radius l_1 um den Ursprung $(0,0,0)$ des Koordinatensystems; die ‚untere‘ Masse m_2 bewegt sich auf einem auf dem fixen Trägerkreis K_1 mit geführten Kreis² K_2 mit dem Radius l_2 , der den zeitabhängigen Mittelpunkt $(x_1, y_1, 0)$ hat (siehe Abbildung 2). Beide Kreise liegen in der Ebene $z=0$.



(2) Epizykel genannt: Das ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf einem Trägerkreis geführt wird.

1.2 Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

Im Lagrange-Formalismus der *zweiten* Art werden die Zwangsbedingungen durch eine geeignete Wahl von generalisierten Koordinaten berücksichtigt, der Formalismus der *ersten* Art führt (aufwendiger) explizite Zwangskräfte ein, die die Massen auf die gewünschten Bahnen zwingen.

Als generalisierte Koordinaten im Lagrange-Formalismus werden für die beiden Freiheitsgrade die Auslenkungswinkel θ_1 und θ_2 (und deren Differenz $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$) verwendet.

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\x_2 &= x_1 + l_2 \sin \theta_2 \\y_2 &= y_1 - l_2 \cos \theta_2\end{aligned}\quad \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Der Leser rechnet leicht nach, dass mit diesen Winkeln die obigen beiden Zwangsbedingungen quasi ‚automatisch‘ erfüllt werden.

Die kinetische Energie T ergibt sich wie folgt aus den Geschwindigkeiten v_i ($i=1,2$) der Pendelmassen, wobei die Punkte über den Koordinaten deren zeitliche Ableitung meint.	$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$ $T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ $v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$
Die potentielle Energie V im homogenen Schwerkraftfeld der Erde ist gegeben durch:	$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$
Die Gesamtenergie E des Doppelpendels ist eine Konstante der Bewegung, ist eine Erhaltungsgröße.	$E = T + V = \text{const}$

Die kinetische Energie T und die potentielle Energie V werden im Langrange-Formalismus als Funktionen der generalisierten Koordinaten θ_i und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\theta}_i$ benötigt, dazu braucht es die zeitlichen Ableitungen der kartesischen Koordinaten x_i und y_i . Mit etwas Rechnerei erhält man daraus die beiden Energien T und V in den gewünschten Abhängigkeiten von den gewählten generalisierten Koordinaten.

$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1$ $\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1$	$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$ $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2$
$T(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \Delta\theta$	
$V(\theta_1, \theta_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$	

Mit den 3 folgenden ‚willkürlichen‘ Konstanten werden die Formeln (für meinen Geschmack) etwas übersichtlicher.

$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$	$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	$\omega = \frac{g}{l_1}$	$m_2 \neq 0$	$l_1 \neq 0$
-------------------------------	-----------------------------	--------------------------	--------------	--------------

<i>Die kinetische Energie</i> $T(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = \gamma_T (\dot{\theta}_1^2 + \mu \lambda^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\mu\lambda \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \Delta\theta)$ $\gamma_T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2$

Die potentielle Energie

$$V(\theta_1, \theta_2) = \gamma_V (\cos \theta_1 + \mu \lambda \cos \theta_2) \quad \gamma_V = -(m_1 + m_2) l_1 g$$

Die Gesamtenergie

$$E(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = \gamma_T (\dot{\theta}_1^2 + \mu \lambda^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\mu \lambda \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \Delta \theta) + \gamma_V (\cos \theta_1 + \mu \lambda \cos \theta_2)$$

Die zwei Bewegungsgleichungen im Lagrange-Formalismus ergeben sich dann für die generalisierten Koordinaten aus der Langrange-Funktion L und den nebenstehenden Lagrange'schen Gleichungen.

$$\begin{aligned} L &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \\ & \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \Delta \theta + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \Delta \theta + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \Delta \theta + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \Delta \theta + m_2 g \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es sind die nachfolgenden Bewegungsgleichungen, die ich so aufbereite, dass nicht ich sondern das Werkzeug Scilab fleißig zu tun hat – Laufzeiteffizienz ist hier kein Thema.

Die Bewegungsgleichungen 2. Ordnung

$$\ddot{\theta}_1 + \mu \lambda \cos \Delta \theta \ddot{\theta}_2 + \mu \lambda \sin \Delta \theta \dot{\theta}_2^2 + \omega \sin \theta_1 = 0$$

$$\cos \Delta \theta \ddot{\theta}_1 + \lambda \ddot{\theta}_2 - \sin \Delta \theta \dot{\theta}_1^2 + \omega \sin \theta_2 = 0$$

1.3 Aufbereitung der Bewegungsgleichungen für Scilab

Ziel der weiteren Schritte ist eine Umstellung der Bewegungsgleichungen in eine Matrix-Form, die von Scilab elegant verarbeitet werden kann.

$p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}_1 \quad \dot{p}_1 = \ddot{\theta}_1$	$p_2 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}_2 \quad \dot{p}_2 = \ddot{\theta}_2$
$\dot{p}_1 + \mu \lambda \cos \Delta \theta \quad \dot{p}_2 + \mu \lambda \sin \Delta \theta \quad p_2^2 + \omega \sin \theta_1 = 0$ $\cos \Delta \theta \quad \dot{p}_1 + \lambda \quad \dot{p}_2 - \sin \Delta \theta \quad p_1^2 + \omega \sin \theta_2 = 0$	
$\begin{pmatrix} 1 & \mu \lambda \cos \Delta \theta \\ \cos \Delta \theta & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \lambda \sin \Delta \theta & p_2^2 - \omega \sin \theta_1 \\ \sin \Delta \theta & p_1^2 - \omega \sin \theta_2 \end{pmatrix}$	
$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$	$\mathbf{A} \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{b} = 0 \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$
Die anfänglichen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lassen sich dann in Matrixform ausschreiben als Differentialgleichungen 1. Ordnung:	$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$ $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \lambda \cos \Delta \theta \\ \cos \Delta \theta & \lambda \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$	$b_1 = -\mu \lambda \sin \Delta \theta \quad p_2^2 - \omega \sin \theta_1$ $b_2 = \sin \Delta \theta \quad p_1^2 - \omega \sin \theta_2$
Determinante von \mathbf{A} $ \mathbf{A} = \lambda (1 - \mu \cos^2 \Delta \theta)$ $ \mathbf{A} \neq 0 \quad \forall \theta_1, \theta_2$	Inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} von \mathbf{A} $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ \mathbf{A} } \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \lambda \cos \Delta \theta \\ -\cos \Delta \theta & 1 \end{pmatrix}$

Mit dem wissenschaftlichen Werkzeugkasten Scilab kann man sich auch den Weg über die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} sparen – wenn man sich die zusätzlichen Rechenzeit leisten will und kann, und lässt Scilab \mathbf{A}^{-1} für jeden Winkel berechnen³. Die 4 Differentialgleichungen lassen sich dann in einer kompakten Form darstellen, die Scilab in dieser Form ohne weiteres verarbeiten kann.

Matrixgleichung in Scilab $\mathbf{A} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \neq 0$	Lösungsvektor der Matrixgleichung in Scilab $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$
Differentialgleichungssystem des Doppelpendels $\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \end{Bmatrix}$	Differentialgleichungssystem für Scilab $\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \setminus \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \end{Bmatrix}$

Die geschweiften Klammern sollen hier andeuten, dass die Gleichheit komponentenweise zu verstehen ist. Der Rückstrich \setminus bezeichnet in Scilab die linksseitige Matrixmultiplikation: $\mathbf{x} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$ ist eine Lösung der linearen Matrixgleichung $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(3) Solche Werkzeuge wie die Computeralgebrasysteme Mathematica oder Maxima gehen einen großen Schritt weiter und können einem einen Haufen lästiger Arbeit wie das Umformen von Gleichungen ersparen.

Die 4 Funktionen auf der rechten Seite des obigen Gleichungssystems sind es, die dem Scilab-Integrator **ode** in der Form einer Rückgabeliste **ydot** einer Funktion, hier *fdpLagrange* beziehungsweise *fdp* genannt, übergeben werden, zusammen mit dem Tripel der gewünschten Anfangsbedingungen **yo**, **to**, **tData**.

```
function ydot=fdpLagrange(t,y)
w1=y(1); w2=y(2);
p1=y(3); p2=y(4);
wd=fwdot(w1,w2,p1,p2);
pd=fpdot(w1,w2,p1,p2);
ydot=wd(1)*[1;0;0;0] ..
+wd(2)*[0;1;0;0] ..
+pd(1)*[0;0;1;0] ..
+pd(2)*[0;0;0;1];
endfunction;

fdp=fdpLagrange;
yData=ode(y0,to,tData,fdp);
```

2 Das Energieverhalten der Scilab-Lösungen

Für abgeschlossene physikalische Systeme, solche also die mit der Umgebung keine Energie austauschen, gilt das grundlegende Gesetz von der Erhaltung der Energie. Erhält das Pendel mit den gewählten Anfangsbedingungen zur Zeit t_0 eine Gesamtenergie E_0 , so bleibt die Gesamtenergie des hier modellierten Pendels für alle Zeiten erhalten, in der Form einer Gleichung ausgedrückt: $E_0 = E(t_0) = E(t), \forall t \geq t_0$.

Jede numerisch gewonnene Lösung der Bewegungsgleichungen für ein Pendel muss zum einen natürlich die Zwangsbedingungen⁴ zum anderen die Energieerhaltung in vorgegebene Grenzen erfüllen. Es macht also Sinn, die numerischen Lösungen dahingehend zu überprüfen, gerade auch weil das Doppelpendelproblem zu den Problemen gehört, die einem ‚deterministischen Chaos‘⁵ unterliegen und numerische Lösungen gerne auch mit einiger Vehemenz infrage gestellt werden.

2.1 Das Einfachpendel

Das ebene Einfachpendel und seine numerischen Lösungen im nichtlinearen Bereich dient mir als Anschauungsbeispiel, um ein ‚Gefühl‘ für das Energieverhalten bei dessen numerischen Lösungen mittels Scilab zu erhalten.

Die Pendeldaten Masse, Länge und Zeiten sind gegeben durch:

$m1=1.0$	Pendelmasse [kg]	$t0=0$	$t_end=20$	Dauer [s]
$l1=1.0$	Pendellänge [m]			

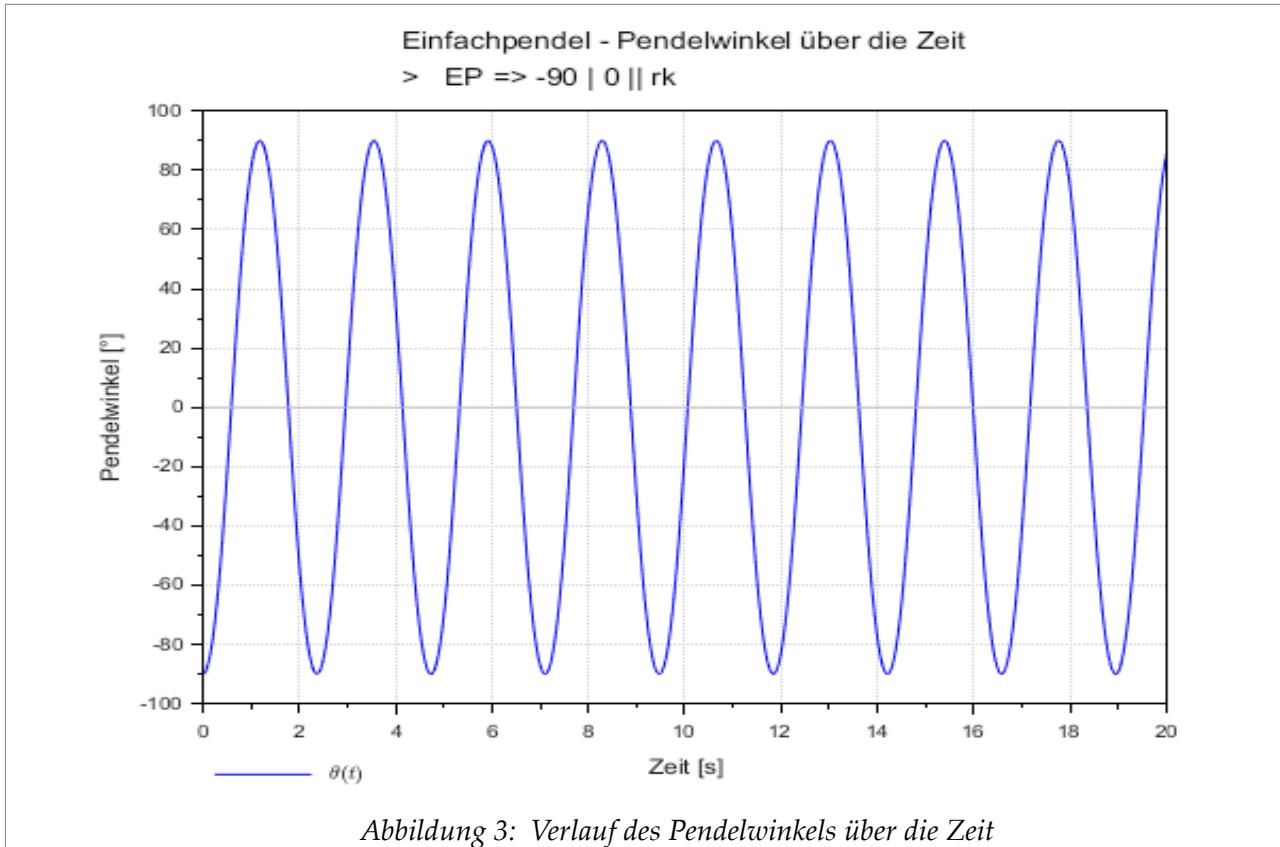
Die Anfangsbedingungen in den Einheiten Bogengrad [$^\circ$] und Bogengrad pro Sekunde [$^\circ/\text{s}$] sowie das oder die numerischen Lösungsverfahren sind den Grafiken zu entnehmen.

Einfaches Verhalten: Schwingen

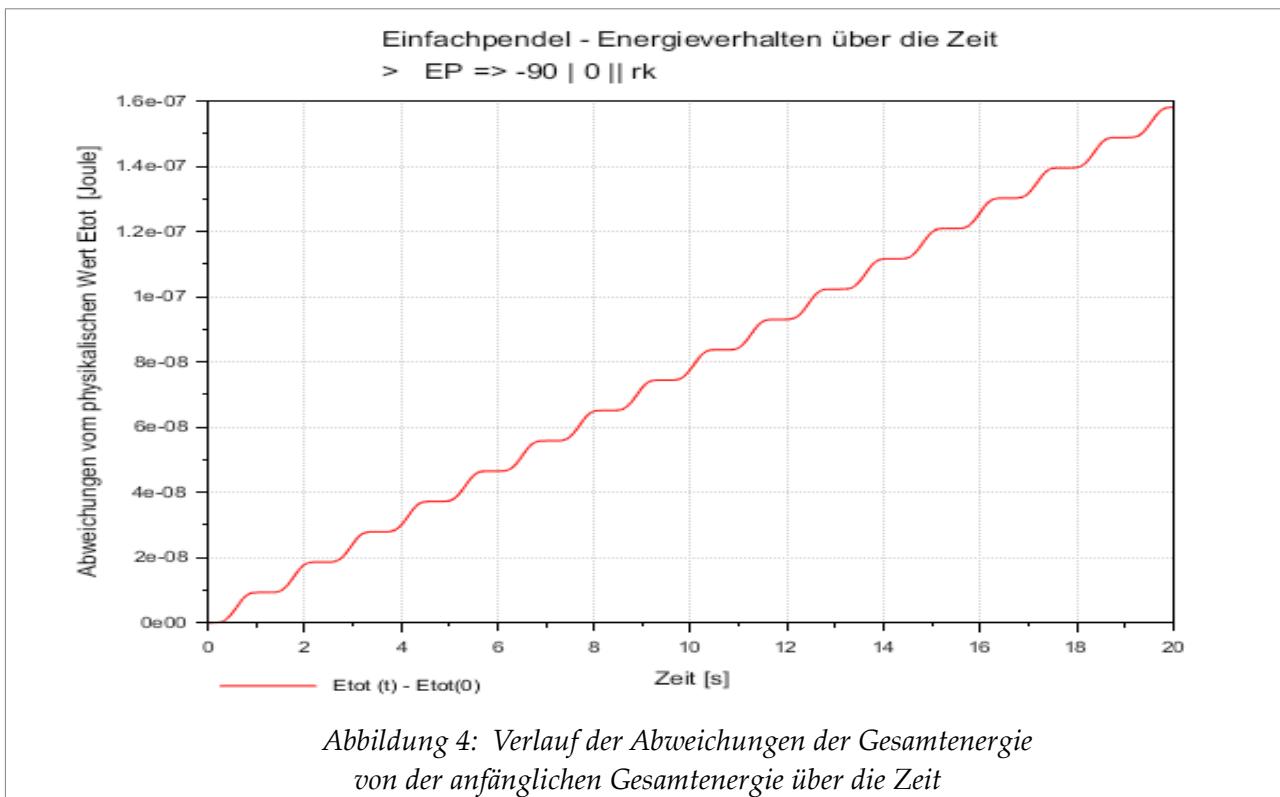
Das einfache Pendel schwingt ohne einen weiteren Anschub einfach nur brav hin und her, mehr ist nicht drin. Ich zähle in der nächsten Abbildung 3 knapp $8\frac{1}{2}$ Schwingungen in der Laufzeit von 20 Sekunden ; ein Uhrenpendel mit einer Pendellänge von 0,994 m und einer kleinen Anfangsauslenkung schwingt hierzulande in 20 Sekunden genau 10 mal hin und her: Größere anfängliche Auslenkungen außerhalb des Winkelbereichs, in dem lineare Näherungen für die Bewegungsgleichungen sinnvoll sind, führen zu längeren Schwingungszeiten, zu einem langsameren Schwingen zwischen den beiden Maximalamplituden von $\pm 90^\circ$.

(4) Die Zwangsbedingungen werden im Lagrange-Formalismus (der 2. Art) über die generalisierten Koordinaten berücksichtigt.

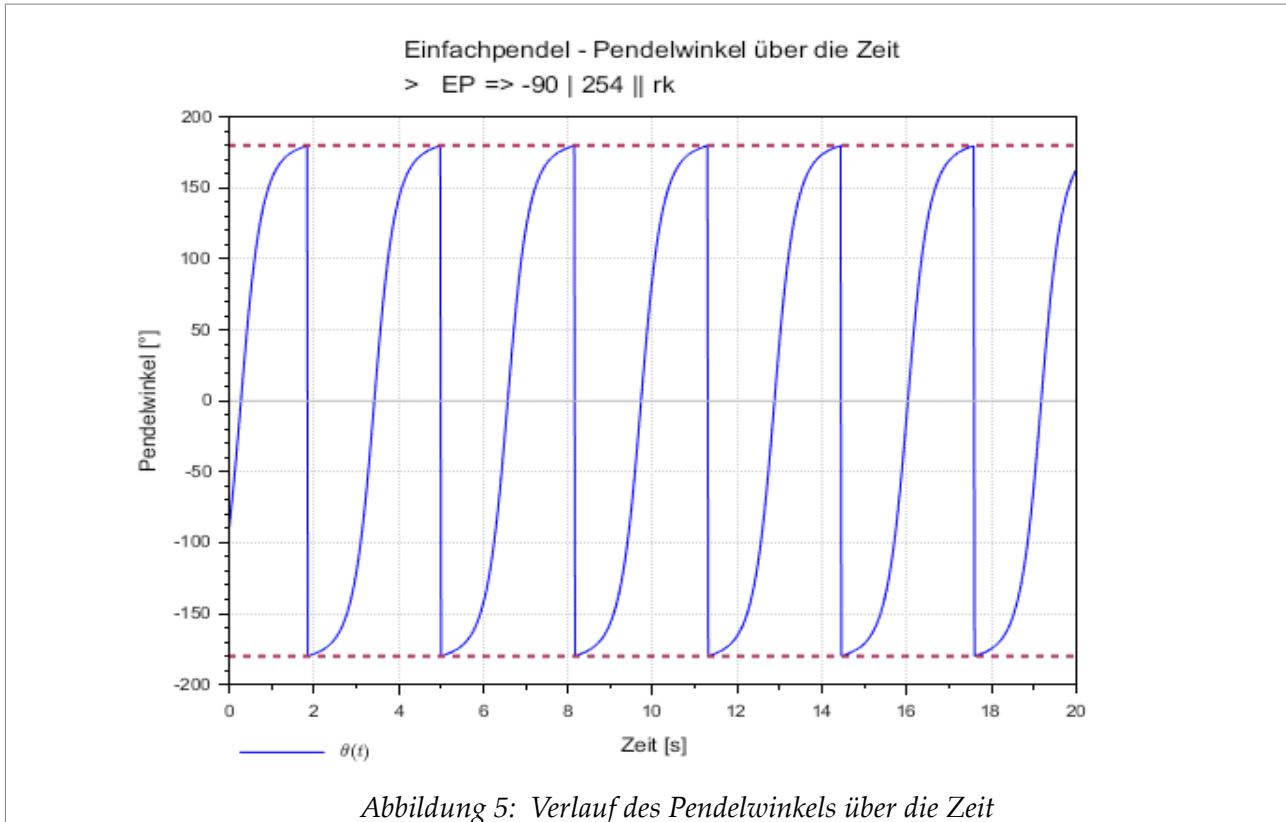
(5) Kleine Änderungen der Anfangs- oder der Parameterbedingungen führen zu ‚großen‘ Änderungen im Lösungsverhalten – der berühmte Schmetterlingseffekt.



Nichts stört das Einfachpendel beim Hin- und Herschwingen, so harmonisch wie der Mensch seit den alten Griechen bis hinein in die Neuzeit die Welt gerne sähe, so göttlich wohlgeordnet und einfach zu verstehen, alles andere wäre Teufelswerk. Die Neuronen haben sich an dieses lineare Naturverständnis gewöhnt.



Eine moderat stufenartig wachsende Tendenz des zeitlichen Verlaufs der im Theorieumfeld konstanten Gesamtenergie E_{tot} ist zu erkennen, ich würde aber dem Gefühl nach sagen, dass auch nach 20 Sekunden und vielen Integrationsschritten die in Abbildung 4 grafisch präsentierte Lösung der Differentialgleichungen noch der Energieschale $E_{\text{tot}}(t=0)$ zuzuordnen ist – die Abweichungen sind minimal, wenn ich als Maßstab etwa die gemittelten kinetischen und potentiellen Energien mit den Werten $+/-4,50526$ heranziehe.



2.2 Komplexeres Verhalten: Kreiseln

Die hohe Anfangsgeschwindigkeit zwingt das Pendel in Abbildung 5 zum ewigen Rotieren, was bei den hier gewählten Winkelkoordinaten in der Ebene an den senkrechten Sprüngen von $+180^\circ$ nach -180° erkennbar ist.

Die folgende Abbildung 6 zeigt, dass die Abweichungen von der konstanten Gesamtenergie auch beim rotierenden Einzelpendel über 20 Sekunden Laufzeit minimal sind, bezogen etwa auf den Wert 9,82635 der Gesamtenergie. Der nun stark ausgeprägte, fast sprungartige Verlauf springt sofort ins Auge, insbesondere auch der nahezu horizontale Verlauf über die rund 2,5 Sekunden breite Zeitintervalle. Diese Intervalle liegen um den oberen stationären Bahnpunkt des Pendels – für den die Änderungsbeschleunigung des Umlaufwinkels verschwindet – und in dessen Umgebung sich die Änderungsgeschwindigkeit nur langsam ändert. Die übernächste Abbildung 7 zeigt, dass in diesem Bereich um den stationären Punkt die potentiellen und die kinetischen Einzelenergien nahezu konstant bleiben.

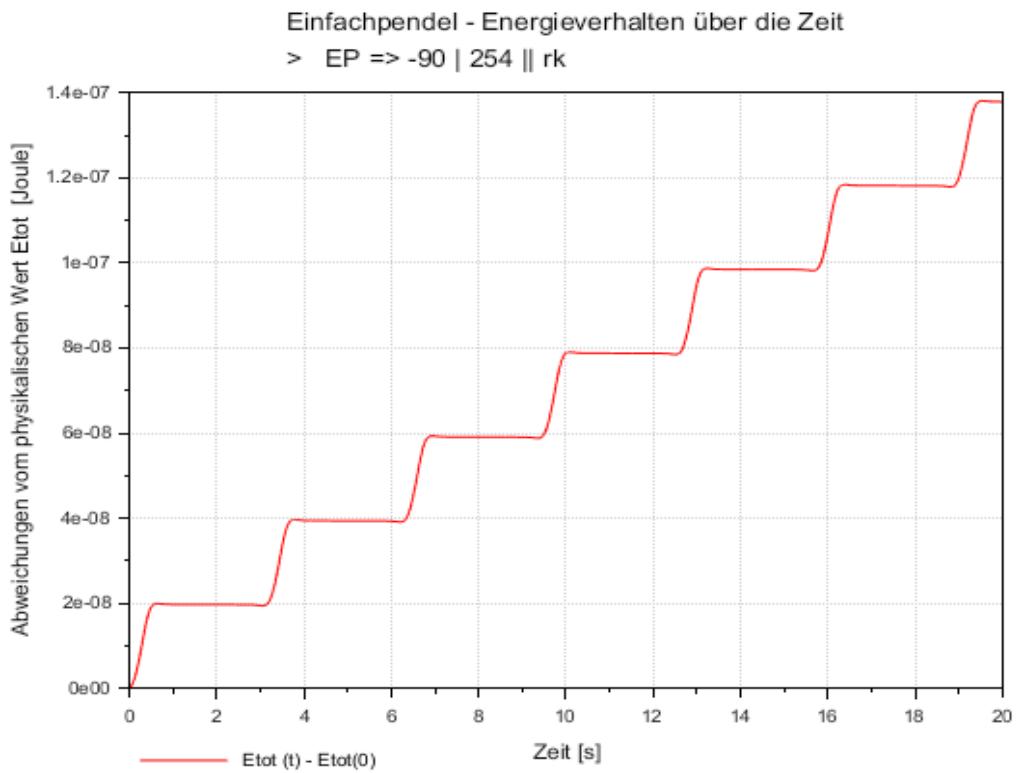


Abbildung 6: Verlauf der Abweichungen der Gesamtenergie über die Zeit

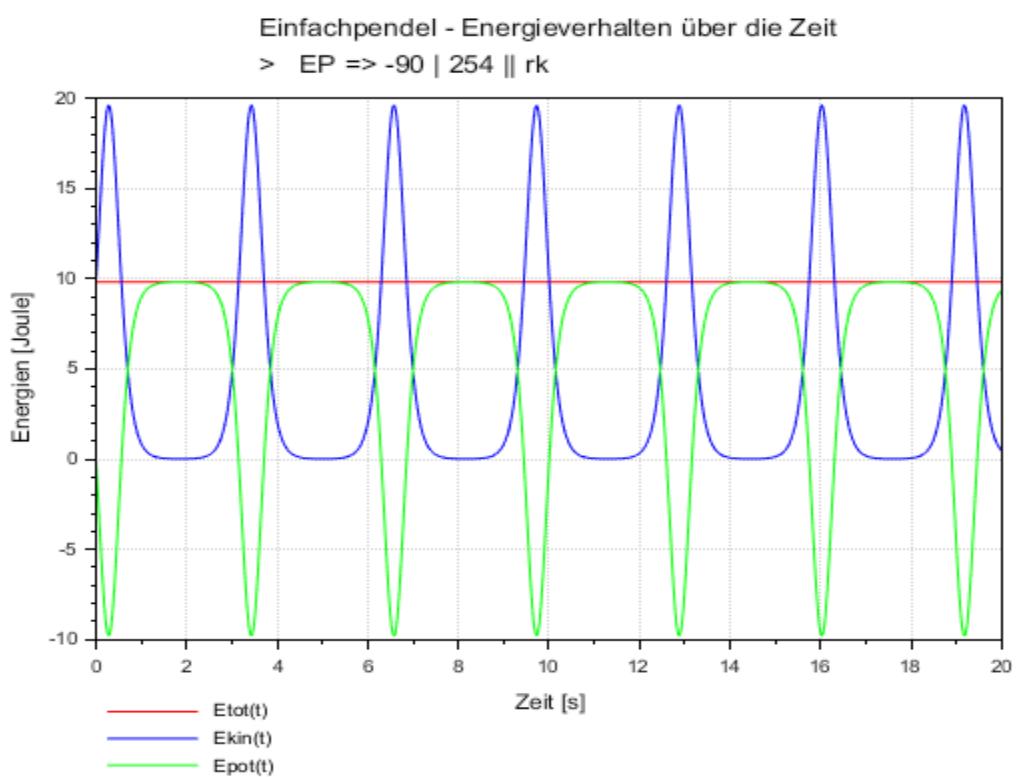


Abbildung 7: Verlauf der Einzelergien E_{pot} und E_{kin} über die Zeit

2.3 Das Doppelpendel

Die Pendeldaten Massen, Längen und Zeiten sind gegeben durch:

$l_1=1.0; m_1=1.0;$	Pendelmasse [kg];	Pendellänge [m]
$l_2=0.5; m_2=0.5;$	Pendelmasse [kg];	Pendellänge [m]
$t_0=0; t_{\text{End}}=20;$	Dauer [s]	

Die Anfangsbedingungen in den Einheiten Bogengrad [$^\circ$] und Bogengrad pro Sekunde [$^\circ/\text{s}$] sowie das oder die numerischen Lösungsverfahren sind den Grafiken zu entnehmen.

Einfaches Verhalten

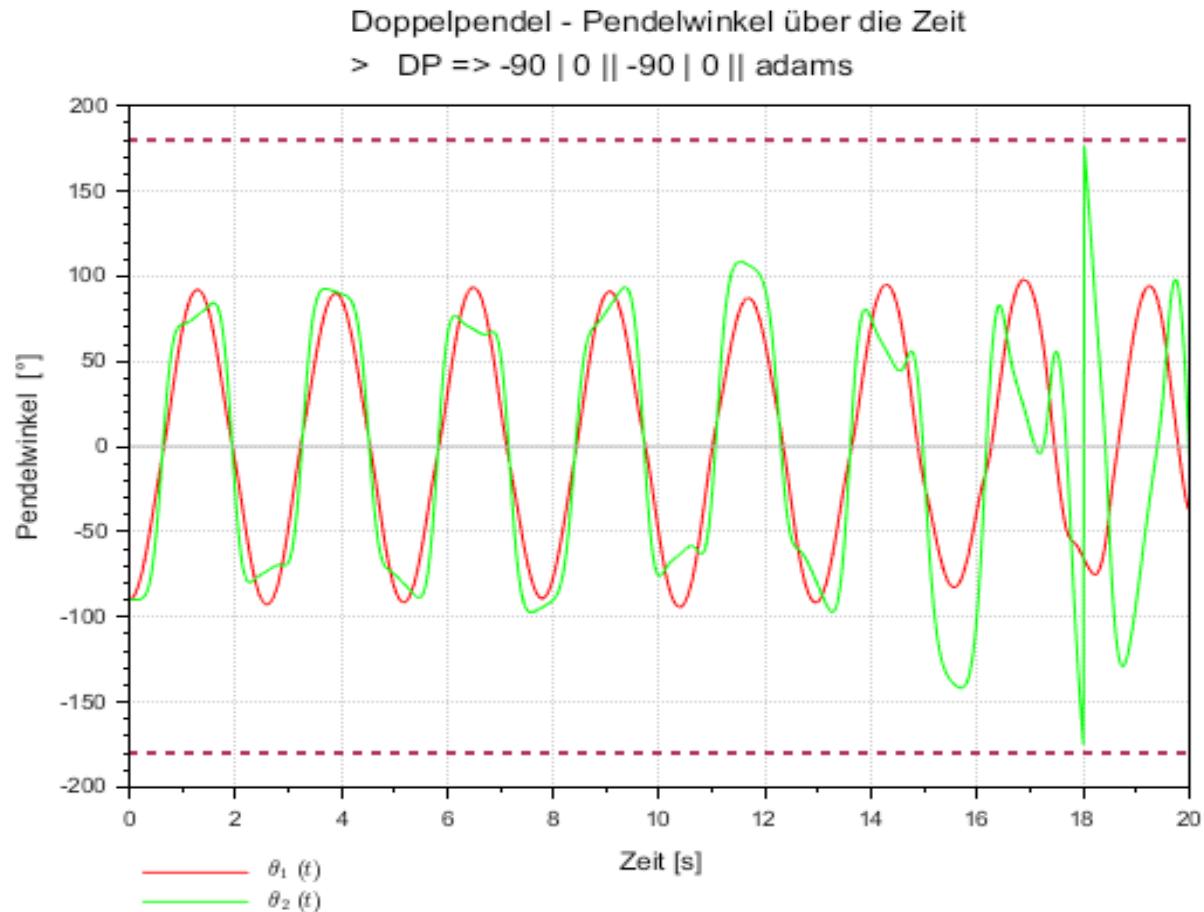


Abbildung 8: Verlauf der Pendelwinkel über die Zeit für 20 Sekunden

Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien in **kastanienbraun** markieren in den Abbildungen den Winkelbereich zwischen $+180^\circ$ und -180° .

Das Runge-Kutta-Integrationsverfahren von Scilab (,rk') steigt bei den hier gewählten Anfangsbedingungen aus mit der kaum sinnstiftenden Meldung „An error occurred in 'lsrgk' subroutine“. Ich habe nicht nachgebohrt und statt ,rk' einfach ,adams' benutzt. Der Ausstieg könnte daran liegen, dass bei gleicher Anfangsauslenkung der Pendelkörper die Relativkoordinate $\theta_1(0) - \theta_2(0)$ verschwindet.

Beide Pendel werden anfänglich ‚nach links‘ um einen rechten Winkel (entsprechend -90°) ausgelenkt. Das **obere, schwerere** Pendel lässt sich durch seinen leichteren Partner im Schlepptau eine ganze Weile kaum stören, es schwingt noch recht harmonisch hin und her. Das **leichtere, untere** Pendel schwingt ebenfalls eine ganze Weile synchron mit dem oberen Partner, allerdings bereits mit kleinen Dellen, Störungen der reinen Harmonie; zur Zeit 11,5 s überholt das kleine Pendel allerdings das schwerere zum ersten Mal nach rechts um etliche Bogengrade, dann mit wachsender Amplitude zur Zeit 15,5 s ein zweites Mal, nun nach links – um weiter Schwung aufzunehmen, sodass es bei 18,0 s für einen Überschlag reicht. Die nächste Abbildung 9, die nur das zeitliche Integrationintervall auf 40 Sekunden hoch schraubt, zeigt, dass es bei dem einen Salto nicht bleibt, das Ablaufmuster ändert sich gänzlich.

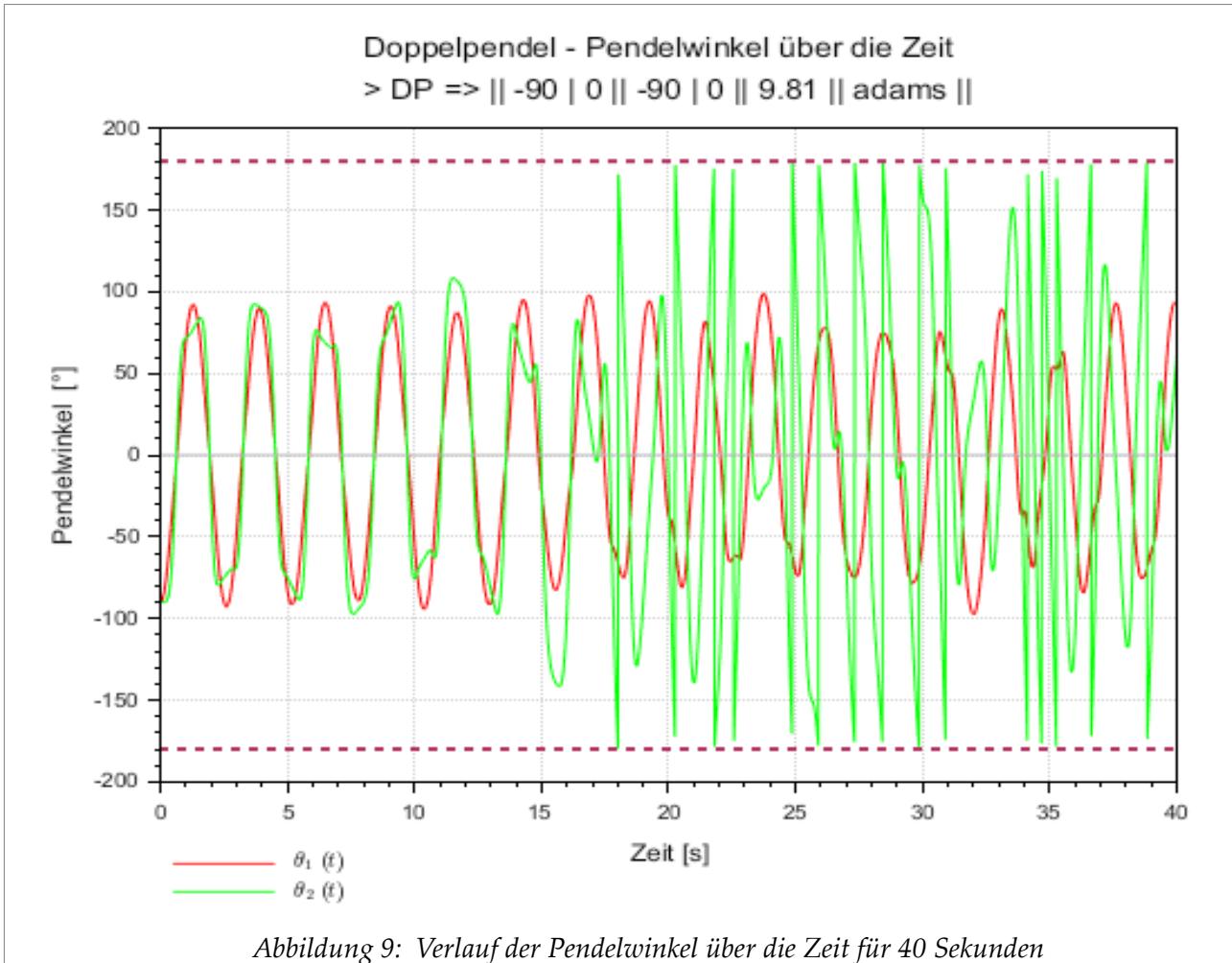


Abbildung 9: Verlauf der Pendelwinkel über die Zeit für 40 Sekunden

Späte Einsicht: Ein schlichtes Diagramm, das den Zeitverlauf der Auslenkungswinkel zeigt, sagt mehr als 1000 Bilder, die ein vergänglich flüchtiges Video ergeben.

Die folgenden Abbildungen 10 und 11 widmen sich dem zeitlichen Energieverhalten. Die Gesamtenergie ist eine Konstante der Bewegung, sie verschwindet für die gewählten Anfangsbedingungen $E_{\text{tot}}(t)=0$, daher gilt für die beiden Teilenergien $E_{\text{kin}}(t)=-E_{\text{pot}}(t)$.

Die Abweichungen der berechneten Gesamtenergie über die Zeit vom Sollwert erscheinen mir über den Berechnungszeitraum von 20 s marginal zu sein; die mittels ‚adams‘ berechnete Lösung der Ausgangsdifferentialgleichungen, dargestellt in der Abbildung 8, sollte also eine Lösung sein, wie sie durchaus auch ein physikalischen Doppelpendel in der realen Welt absolvieren könnte. Es muss natürlich nicht die genau diese *eine* determinierte Lösung sein, deren Existenz die Mathematik für jeden Satz von Anfangsbedingungen auch für das Doppelpendel beweist.

Ein Anfangswinkel von 90° klingt nach einem messerscharfen Wert, doch die reelle Zahl, die sich hinter 90 Bogengrad versteckt, ist $\pi/2$ und die Kreiszahl Pi steht für eine nicht-rationale Zahl, die sich also nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt und die in allen Zahlensystemen unendlich viele, nicht-periodisch auftretende Nachkommastellen hat. In der realen Anwendung haben alle reelle Zahlen allerdings nur endliche Dezimalstellen, womit die reale Existenz *der einen* gesuchten Lösung in weiteste Ferne rücken kann. Der Leser denke hier an den Schmetterlingseffekt.

Da die gekoppelten Differentialgleichungen des Doppelpendels sich nicht per reiner Mathematik geschlossen lösen lassen, bleibt nur das *Experiment* mit numerischen Näherungsverfahren, unterstützt durch Hardware und Software. Die moderne Mathematik hat zwar mit einem großen Aufwand gezeigt, dass auch die Lösungsräume deterministisch chaotischer Systeme, zu denen das Doppelpendel gehört, durchaus innere Strukturen aufweisen, besonders unerwartet und weitergehend hilfreich sind sie zumindest für mich und mein Interesse nicht – viel Aufwand und wenig Ertrag.

Es bleibt also für einen, der schlicht sehen will, wie ein Doppelpendel schwingt, das lustvolle Experiment mit in allen Belangen *endlicher* Hardware und Software und er muss dabei all deren Schwächen in Kauf nehmen, nicht anders als wie bei einem physikalischen Experiment.

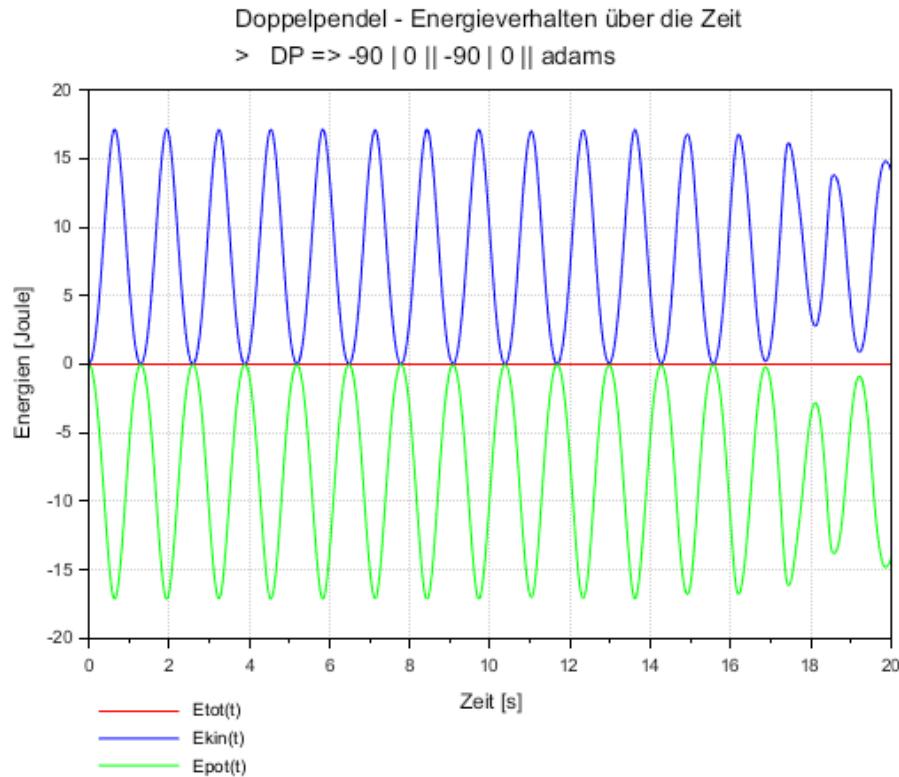


Abbildung 10: Verlauf der Pendelenergien des Doppelpendels über die Zeit

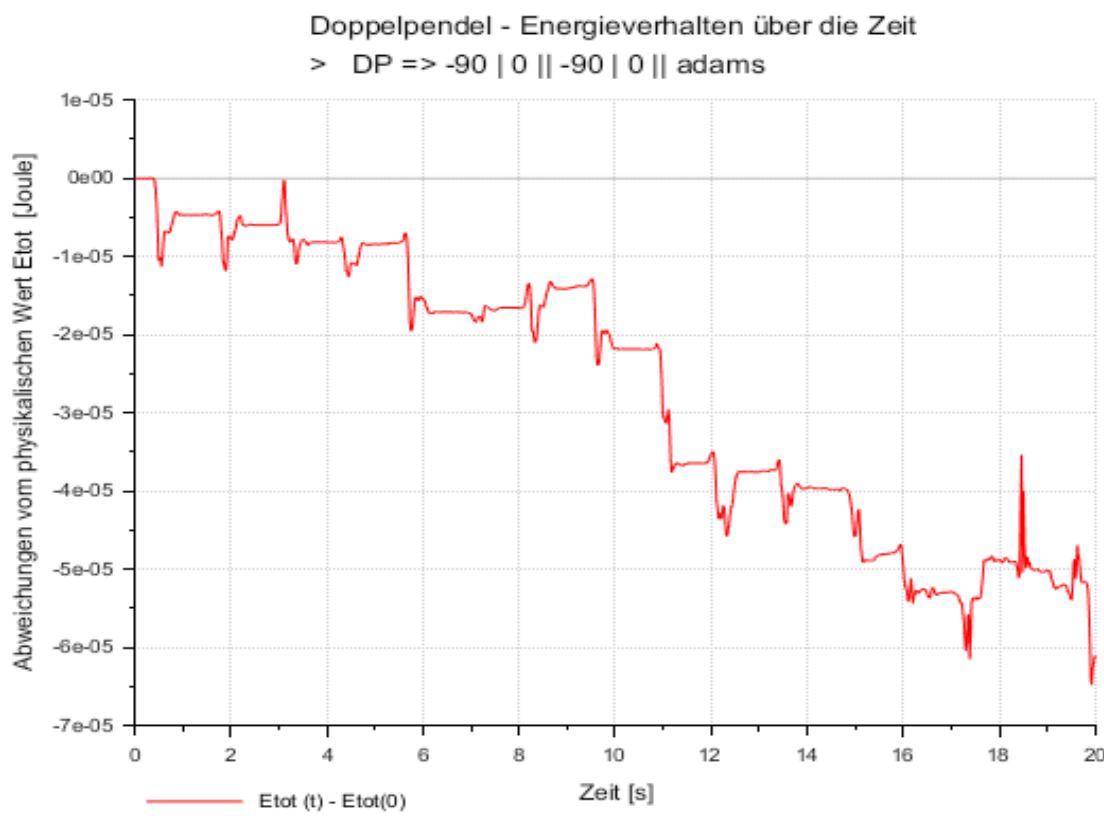
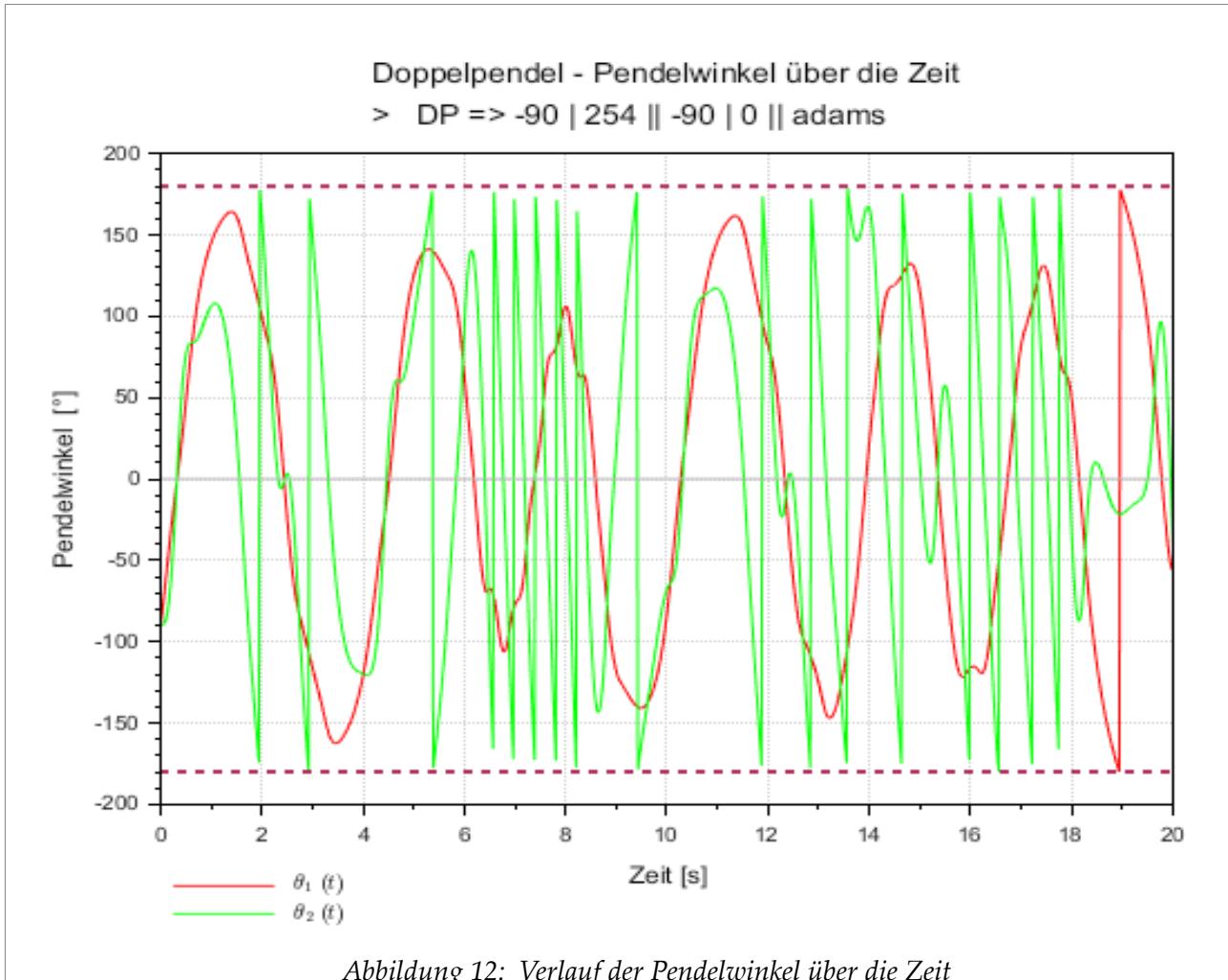
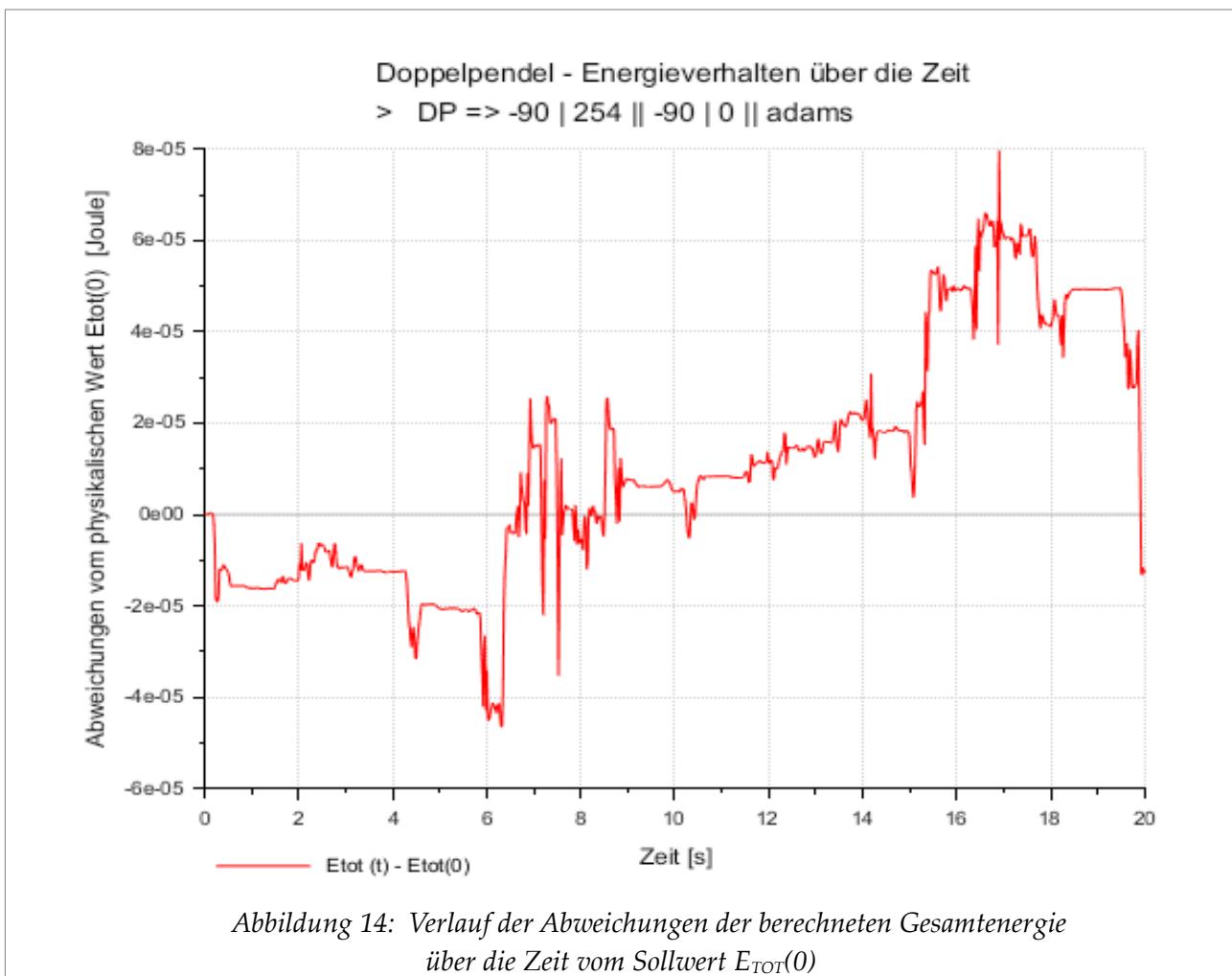
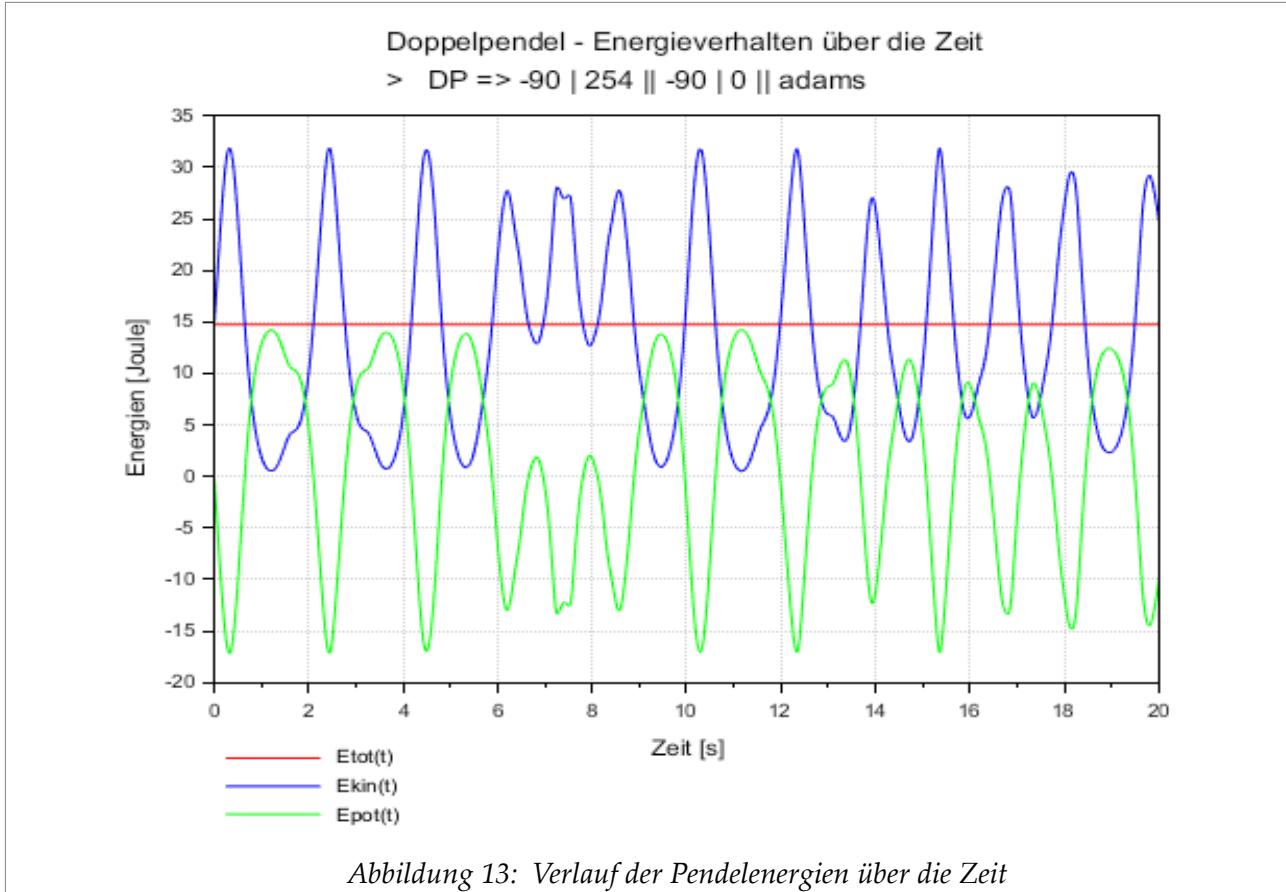


Abbildung 11: Verlauf der Abweichungen der berechneten Gesamtenergie über die Zeit vom Sollwert

Komplexes Verhalten

Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien in **kastanienbraun** markieren den Winkelbereich zwischen $+180^\circ$ und -180° .





3 Die Stabilität der Scilab-Lösungen

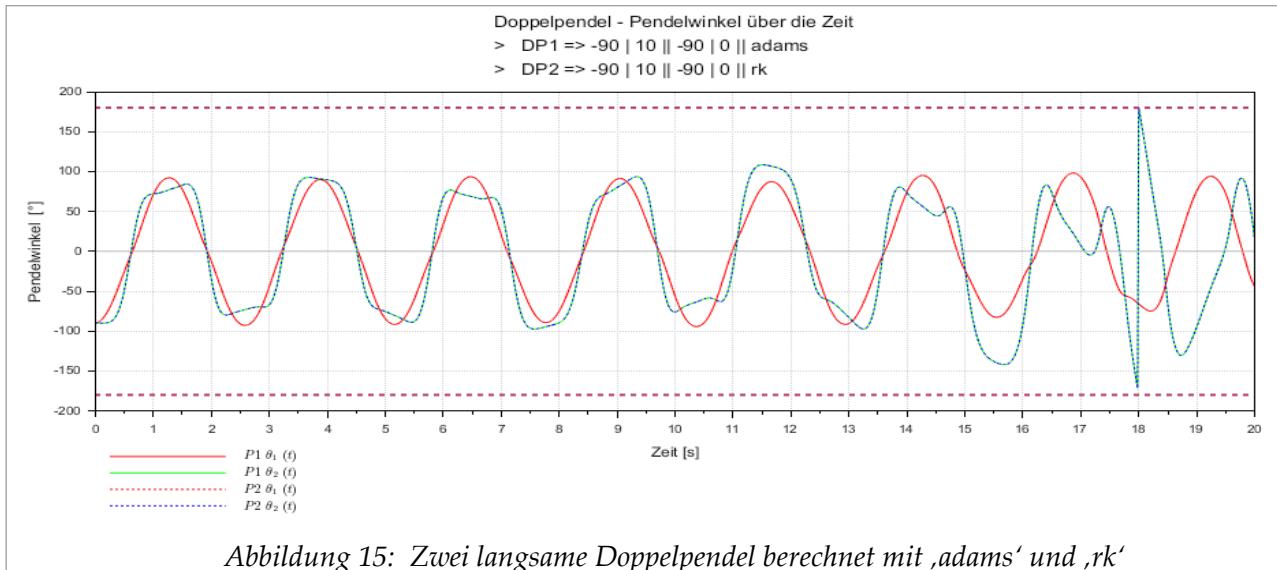
$l_1=1.0;$ $m_1=1.0;$	Pendelmasse [kg];	Pendellänge [m]
$l_2=0.5;$ $m_2=0.5;$	Pendelmasse [kg];	Pendellänge [m]
$t_0=0;$ $t_{\text{End}}=20;$	Dauer [s]	

3.1 Einfluss von Integrationsverfahren

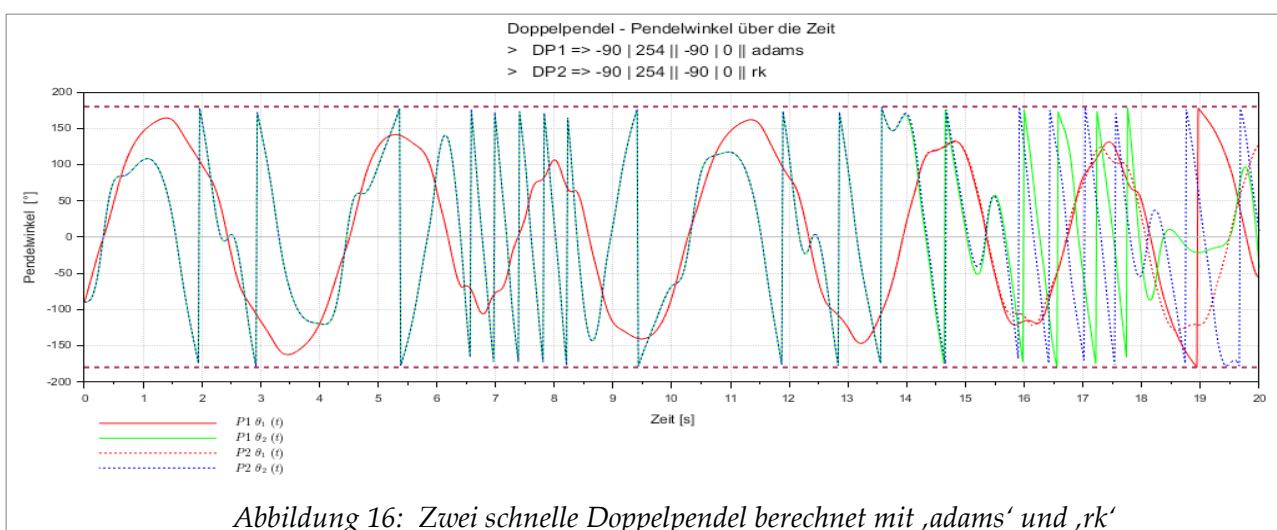
Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien in **kastanienbraun** markieren den Winkelbereich zwischen $+180^\circ$ und -180° .

Die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten wurden hier auf $10^\circ/\text{s}$ gesetzt, da das Lösungsverfahren „rk“ für den Anfangswert $0^\circ/\text{s}$ regelmäßig mit einer Ausnahme ausstieg.

Einfaches Verhalten



Komplexeres Verhalten



3.2 Einfluss von Anfangsbedingungen

Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien in **kastanienbraun** markieren den Winkelbereich zwischen $+180^\circ$ und -180° .

Die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten wurden hier auf $10^\circ/\text{s}$ gesetzt, da das Lösungsverfahren ,rk' für den Anfangswert $0^\circ/\text{s}$ regelmäßig mit einer Ausnahme ausstieg.

Einfaches Verhalten

Zwei ‚langsame‘ Doppelpendel DP1 und DP2 werden im Zeitablauf verglichen. In der Abbildung 17 unterscheiden sich die anfänglichen Auslenkwinkel für das obere Einzelpendel unterschieden sich um 1° , erst nach 19 Sekunden zeigen sich *signifikante* Unterschiede im Verhalten. In der Abbildung 18 beträgt der anfängliche Winkelunterschied für das obere Einzelpendel nur noch $0,1^\circ$, nach 19 Sekunden sind die ersten *kleinen* Änderungen im Ablauf zu erkennen.

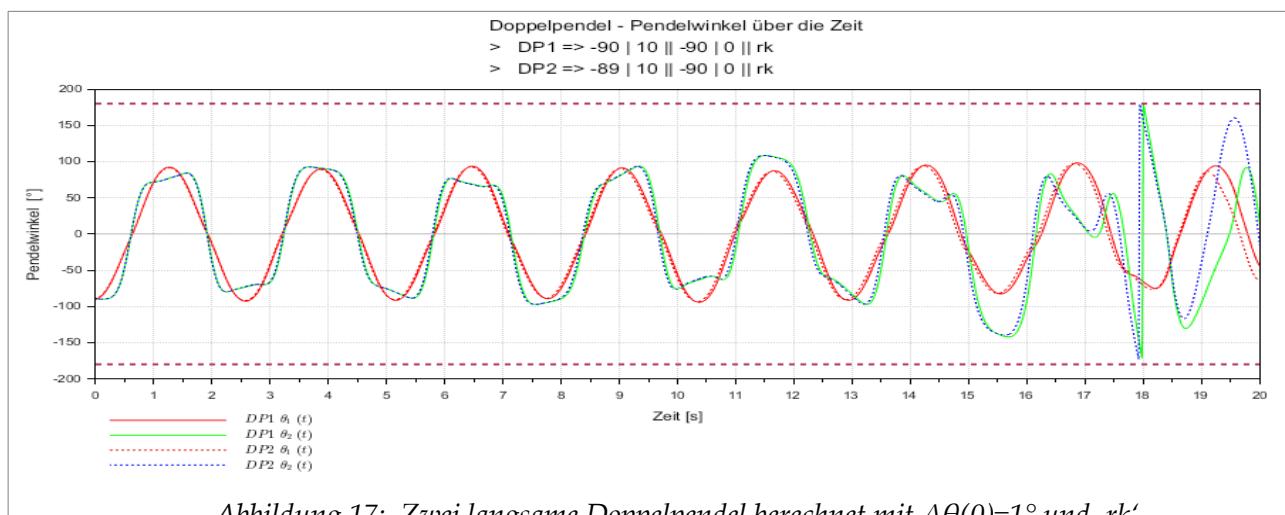


Abbildung 17: Zwei langsame Doppelpendel berechnet mit $\Delta\theta(0)=1^\circ$ und ,rk'

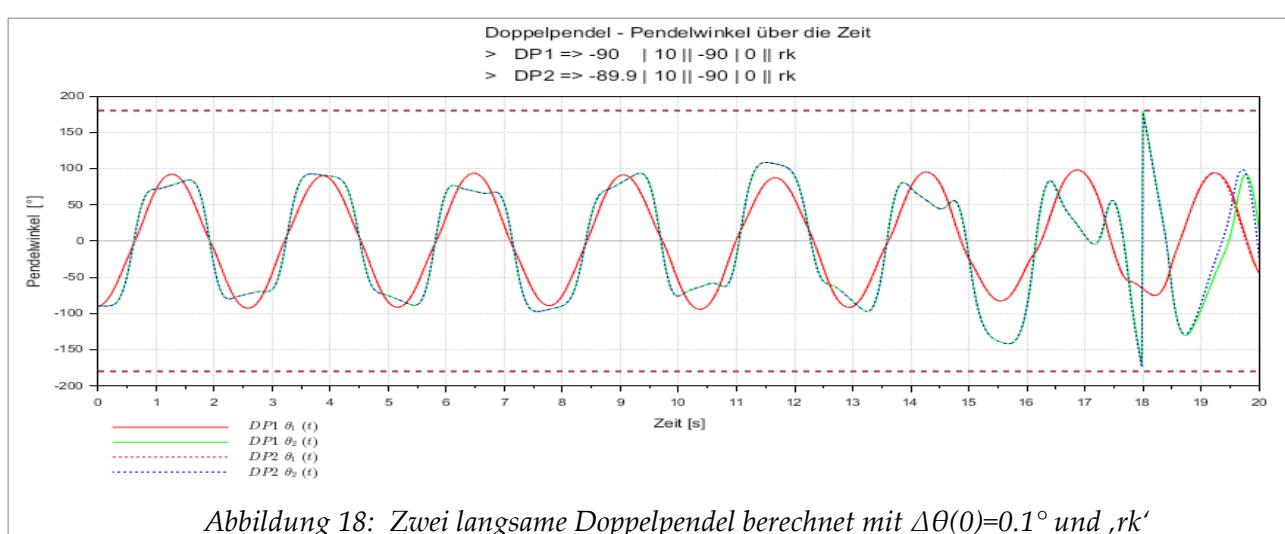


Abbildung 18: Zwei langsame Doppelpendel berechnet mit $\Delta\theta(0)=0,1^\circ$ und ,rk'

Komplexeres Verhalten

Zwei ‚schnelle‘ Doppelpendel DP1 und DP2 werden im Zeitablauf verglichen, die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten für beide Einzelpendel wurden dazu auf $254^\circ/\text{s}$ gesetzt; das untere Einzelpendel hängt hier anfänglich nach unten.

In der Abbildung 19 unterscheiden sich die anfänglichen Auslenkwinkel für das obere Einzelpendel um geringe $0,1^\circ$, schon nach 2 Sekunden beginnen sich *signifikante* Unterschiede im Verhalten abzuzeichnen. In der Abbildung 20 beträgt der anfängliche Winkelunterschied für das obere Einzelpendel nur noch winzige $0,001^\circ$, dennoch beginnen sich bereits nach 5 Sekunden die Verhaltensweisen *signifikant* zu unterscheiden.

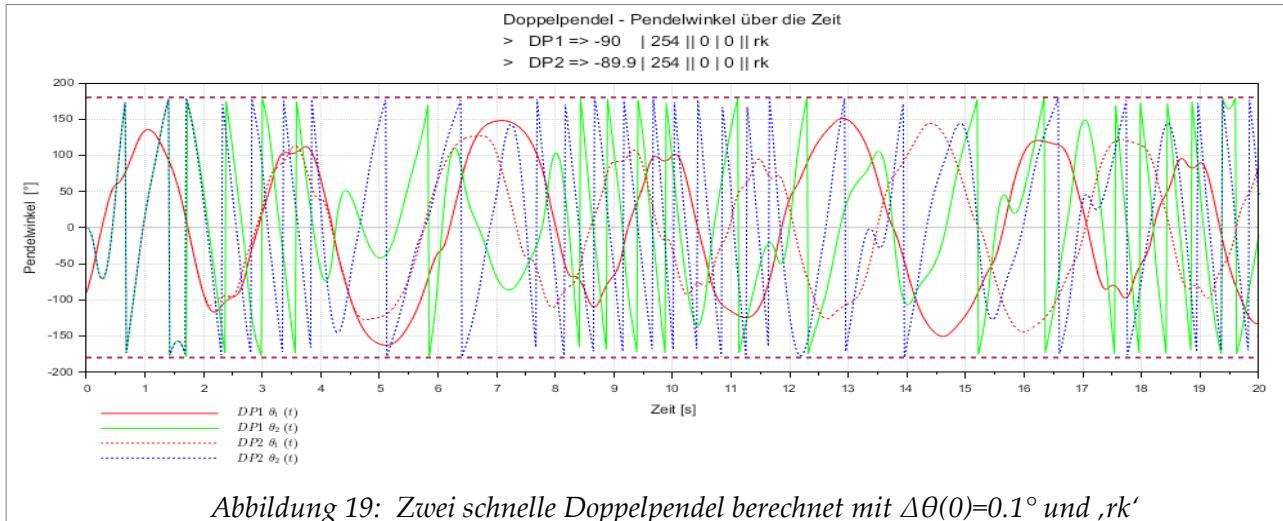


Abbildung 19: Zwei schnelle Doppelpendel berechnet mit $\Delta\theta(0)=0.1^\circ$ und ,rk'

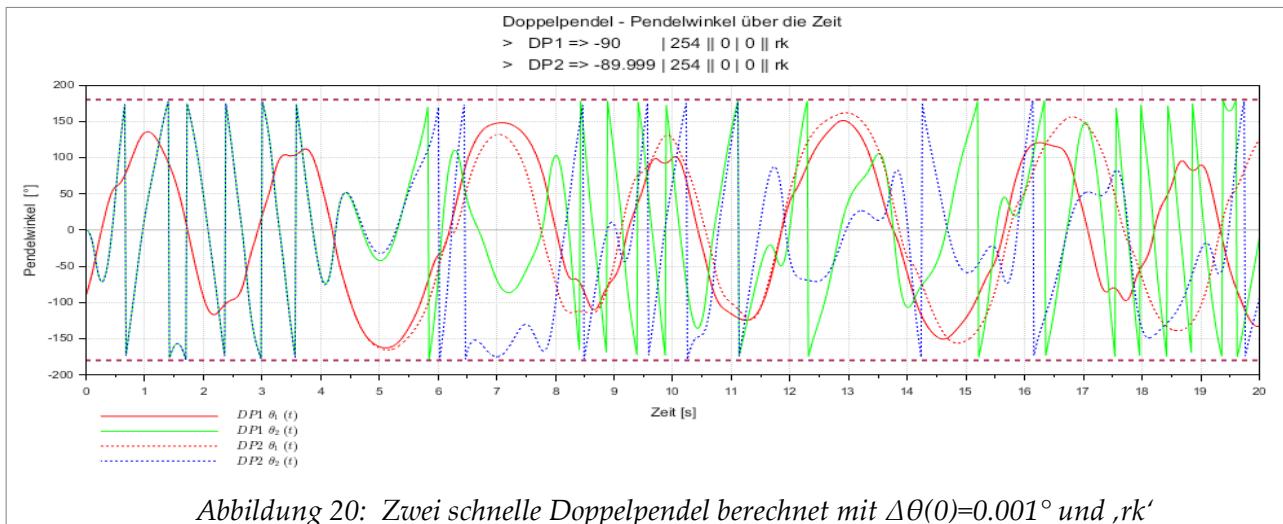


Abbildung 20: Zwei schnelle Doppelpendel berechnet mit $\Delta\theta(0)=0.001^\circ$ und ,rk'

4 Literatur

Peter H. Richter, Hans-Joachim Scholz, 1985

Das ebene Doppelpendel
(Text und Video)

<https://av.tib.eu/media/14902>

„Physikalisches (Realaufnahmen) und mathematisches (Computer-Simulationen) Doppelpendel; ausführliche Diskussion der Bewegungsformen (periodisch, quasi-periodisch, chaotisch) in Abhängigkeit von zahlreichen Ausgangssituationen bei verschiedenen Energieniveaus. Aufbau und Interpretation zugehöriger Poincaré-Schnitte. Darstellung des Zerfalls der letzten KAM-Linie.“

G. Sallet, 2004

Ordinary Differential Equations with Scilab
WATS Lectures, Université de Saint-Louis

<https://www.researchgate.net/>

Etwas Anhang

A. Quotientenmengen für Winkel

Relationen

Eine (zweistellige) *Relation* in einer Menge M wird definiert als eine Teilmenge \sim der Produktmenge M^2 .

Produktmenge

$$M^2 \stackrel{\text{def}}{=} M \times M = \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in M\}$$

Relation als Teilmenge

$$\sim \subset M^2$$

Eine Relation \sim in einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ist.

Die Relation \sim ist reflexiv

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in M} : (x \sim x)$$

Die Relation \sim ist symmetrisch

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in M} \forall_{y \in M} : (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$$

Die Relation \sim ist transitiv

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in M} \forall_{y \in M} \forall_{z \in M} : (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$$

Die Menge aller zu einem x aus M in Relation stehender Elemente aus M heißt *Äquivalenzklasse* $[x]$. Jedes Element aus M ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten und diese Klassen sind paarweise disjunkt.

Eine Äquivalenzrelation erzeugt eine neue Menge M/\sim , die Menge der Äquivalenzklassen von M ; sie wird die *Quotientenmenge* von M nach \sim genannt.

Äquivalenzklasse $[x]$ der Relation \sim

$$[x] = \{y \mid x \in M \wedge y \in M \wedge x \sim y\}$$

Quotientenmenge M/\sim von M nach \sim

$$M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$$

Ein Element $y \in [x]$ aus einer Äquivalenzklasse $[x]$ heißt *Repräsentant* der Klasse $[x]$.

Eine Teilmenge R_\sim aus M heißt *vollständiges Repräsentationssystem* der Menge aller Äquivalenzklassen M/\sim , wenn R_\sim genau ein Element jeder Klasse von M/\sim enthält.

Die flache Einheitssphäre S^1

Die beiden Größen, die die Position der Pendelmassen⁶ in der Schwingungsebene festlegen und die hier als generalisierte Koordinaten zur Problembeschreibung verwendet werden, sind schlichte, geometrisch definierte Winkel, deren Winkelweite in Bruchteilen des Vollkreises gemessen wird. Im Bogenmaß wird dem Vollkreis die ‚Länge‘ 2π als Maßzahl zugewiesen. Ich verwende gerichtete Winkel, um die Richtung der Auslenkung der Pendelmassen mit Werten aus dem Intervall $(-\pi, +\pi]$ zu beschreiben. Eine Besonderheit gilt es nun zu berücksichtigen: Die Punkte mit den reellen Zahlenwerten $-\pi$ und $+\pi$ sollen im Ortsraum eines Pendels denselben Punkt beschreiben. Dazu folgt etwas an mathematischen Formalismus:

In den reellen Zahlen \mathbb{R} sei eine Äquivalenzrelation namens \sim für die Werte v und w wie nebenstehend definiert:

$$\begin{aligned} v, w \in \mathbb{R} \\ v \sim w : \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} \Rightarrow v = w + 2\pi n) \\ [w] \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid w \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R} \wedge v \sim w\} \\ S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}/\sim \end{aligned}$$

Ein Winkelwert w aus dem halboffenen vollständigen Repräsentationsintervall dieser Relation $W := (-\pi, +\pi] \subset \mathbb{R}$ dient als ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[w] \in \mathbb{R}/\sim$, insbesondere gehört der linke *Randwert* $-\pi$ des Intervalls zur Äquivalenzklasse $[+\pi]$, denn es gilt ja die Äquivalenz $(-\pi) \sim (+\pi)$, beziehungsweise ausgeschrieben $(-\pi) = (+\pi) - 2\pi$.

Die eindimensionale⁷ Quotientenmenge S^1 lässt sich in einen zweidimensionalen Produktraum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ einbetten.

$$\begin{aligned} S^1 &\cong \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in W\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

Die über Äquivalenzklassen definierte Einheitssphäre S^1 lässt sich somit eins-zu-eins auf die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 abbilden.

Der flache Torus T^2

In dem Produktraum \mathbb{R}^2 sei eine Äquivalenzrelation namens \square für die Werte v und w wie nebenstehend definiert:

$$\begin{aligned} v, w \in \mathbb{R}^2 &\quad v = (v_1, v_2) \quad w = (w_1, w_2) \\ v \square w : \Leftrightarrow &(v_1 \sim w_1) \wedge (v_2 \sim w_2) \\ [w] \stackrel{\text{def}}{=} \{v &\mid w \in \mathbb{R}^2 \wedge v \in \mathbb{R}^2 \wedge v \square w\} \end{aligned}$$

Mit dieser Äquivalenzrelation \square lässt sich der flache zweidimensionale Torus T^2 als Quotientenraum definieren oder auch direkt als topologisches Produkt der Einheitssphäre S^1 .

$$\begin{aligned} T^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2 / \square \\ T^2 &= S^1 \times S^1 \end{aligned}$$

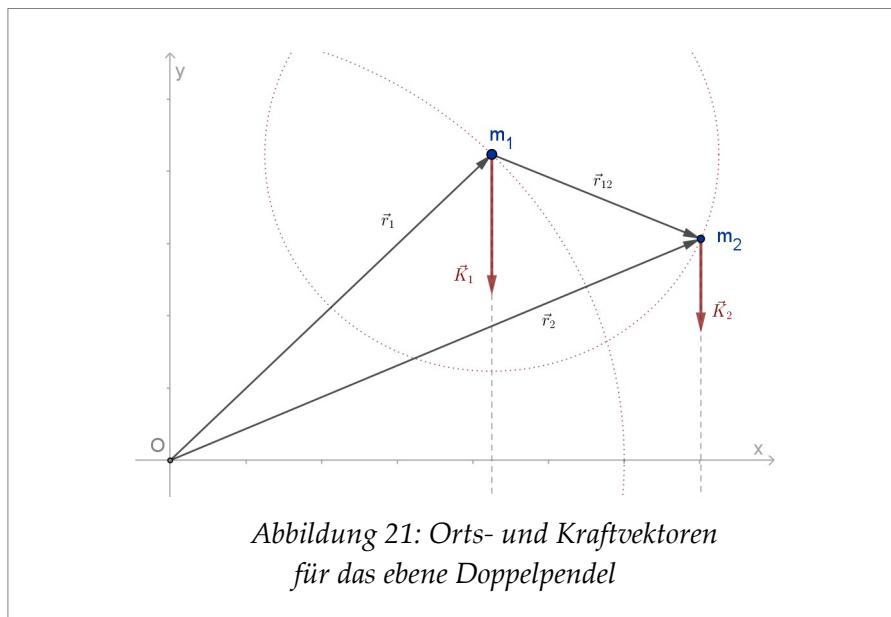
(6) Genauer: deren Schwerpunkte

(7) Deshalb der Terminus ‚flach‘ in der Überschrift.

B. Die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art

Die beiden Massen des Doppelpendels können nicht beliebig frei im Raum herum schwingen, per Konstruktion schwingen sie nur in einer Ebene, zudem sind die Verbindungen der Pendelmassen starr und somit von fester Länge: Die Pendelmasse 1 bewegt sich auf einem Kreis um den Aufhängepunkt O, die Pendelmasse 2 auf einem Kreis um die Pendelmasse 2. In den Newtonschen Bewegungsgleichungen müssen diese vorgegebenen, die Dynamik einschränkenden Bedingungen berücksichtigt werden.

Die althergebrachte Mechanik ergänzt dazu die Newtonschen Bewegungsgleichungen um Zwangskräfte, die die Dynamik im gewünschten Maße einschränken.



Die hier wirksamen, treibenden Kräfte \vec{K}_i lassen sich über den Nabla-Operator ∇_i aus einem Potential V_i ableiten; V_i ist die potentielle Energie des Teilchen im homogenen Schwererfeld der Stärke g .

$$\begin{aligned}\vec{K}_i(\vec{r}_i) &= -m_i g \hat{e}_y \quad i \in \{1,2\} \\ V_i(\vec{r}_i) &= m_i g (\hat{e}_y \cdot \vec{r}_i) = m_i g y_i \\ \vec{K}_i(\vec{r}_i) &= -\nabla_i V_i(\vec{r}_i) \\ \nabla_i &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z_i}\end{aligned}$$

Der Nabla-Operator ∇ aus der Vektoranalysis ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten x , y und z sind. Der Index i bezieht sich hier auf die i -te Variable \vec{r}_i einer Funktion $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, auf die hier der Nabla-Operator wirken soll.

Diese beiden Zwangsbedingungen beschreiben das Doppelpendel als starr. Das Punktteilchen 1 hat vom Aufhängepunkt O den konstanten radialen Abstand l_1 . Das Punktteilchen 2 hat vom Punktteilchen 1 für alle Zeiten den konstanten radialen Abstand l_2 .

$$\begin{aligned}f_1(\vec{r}_1) &= \vec{r}_1^2 - l_1^2 = 0 \\ \vec{r}_{12} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \vec{r}_{12}^2 - l_2^2 = 0\end{aligned}$$

<p>Diese beiden Zwangsbedingungen legen fest, dass sich beide Teilchen per Konstruktion des Doppelpendels für alle Zeiten nur in einer Ebene bewegen können.</p>	$f_3(\vec{r}_1) = z_1 = 0$ $f_4(\vec{r}_2) = z_2 = 0$
$\frac{d}{dt} f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \sum_{i=1}^2 \{\dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_i f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$	
$\frac{d}{dt} f_1(\vec{r}_1) = 2 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_1 = 0$	$\frac{d}{dt} f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2 \dot{\vec{r}}_{12} \cdot \vec{r}_{12} = 0$
$\frac{d^2}{dt^2} f_1(\vec{r}_1) = 2 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_1 + 2 \dot{\vec{r}}_1^2 = 0$	$\frac{d^2}{dt^2} f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2 \ddot{\vec{r}}_{12} \cdot \vec{r}_{12} + 2 \dot{\vec{r}}_{12}^2 = 0$
$\frac{d}{dt} f_3(\vec{r}_1) = \dot{z}_1 = 0 \quad \ddot{z}_1 = 0$	$\frac{d}{dt} f_4(\vec{r}_2) = \dot{z}_2 = 0 \quad \ddot{z}_2 = 0$
$\frac{\partial}{\partial t} f_k = 0 \quad k \in \{1,2,3,4\}$	

Ungebunden hätten die hin und her schwingenden oder auch rotierenden Pendelmassen insgesamt 6 Freiheitsgrade, die 4 Zwangsbedingungen beschränken die Bewegungsmöglichkeiten der Pendelmassen daher auf eine (zeitunabhängige) Fläche, die eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $M_Z^2 \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ des Ausgangsraumes ist. Eine Möglichkeit, diese Einschränkungen in den physikalischen Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen, ist die Einführung von zusätzlichen Zwangskräften, die bewerkstelligen, dass die beiden Punktteilchen sich ausschließlich auf der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M_Z^2 bewegen können.

Lagrangesche Parameter und Zwangskräfte

	$\lambda_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \quad k=1,2,3,4$
$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \quad i \in \{1,2\}$	$\vec{Z}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \nabla_i f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$
$\nabla_1 f_1(\vec{r}_1) = 2 \vec{r}_1$	
$\nabla_1 f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -2 \vec{r}_{12}$	$\nabla_2 f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2 \vec{r}_{12}$
$\nabla_1 f_3(\vec{r}_1) = \hat{e}_z$	$\nabla_2 f_4(\vec{r}_2) = \hat{e}_z$
$\vec{Z}_1 = 2\lambda_1 \vec{r}_1 - 2\lambda_2 \vec{r}_{12} + \lambda_3 \hat{e}_z$	$\vec{Z}_2 = 2\lambda_2 \vec{r}_{12} + \lambda_4 \hat{e}_z$

Die vollständigen Bewegungsgleichungen

$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{K}_1(\vec{r}_1) + 2\lambda_1 \vec{r}_1 - 2\lambda_2 \vec{r}_{12} + \lambda_3 \hat{e}_z$	$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{K}_2(\vec{r}_2) + 2\lambda_2 \vec{r}_{12} + \lambda_4 \hat{e}_z$
$BWG \quad \hat{e}_z \Rightarrow$	$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Die Energien

<i>Kinetische Energie der Masse i</i> $T_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$	<i>Potentielle Energie der Masse i</i> $V_i(\vec{r}_i) = m_i g (\hat{e}_y \cdot \vec{r}_i) = m_i g y_i$
<i>Gesamtenergie beider Massen</i> $E(t) = E(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2; t)$	$E(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2; t) = \sum_{i=1}^2 \{T_i(\dot{\vec{r}}_i) + V_i(\vec{r}_i)\}$
$m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = T_i(\dot{\vec{r}}_i)$	$\vec{K}_i(\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = -(\nabla_i V_i(\vec{r}_i)) \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} V_i(\vec{r}_i)$
$\{m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i(\vec{r}_i)\} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (T_i(\dot{\vec{r}}_i) + V_i(\vec{r}_i))$	$\frac{d}{dt} E(t) = \sum_{i=1}^2 \{m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i(\vec{r}_i)\} \cdot \dot{\vec{r}}_i$
Für unser abgeschlossenes System Doppelpendel, welches also mit der Umgebung nicht wechselwirkt, gilt der Satz von der Erhaltung dessen Gesamtenergie :	$\frac{d}{dt} E(t) = 2\lambda_1 (\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1) + 2\lambda_2 (\vec{r}_{12} \cdot \dot{\vec{r}}_{12}) = 0$

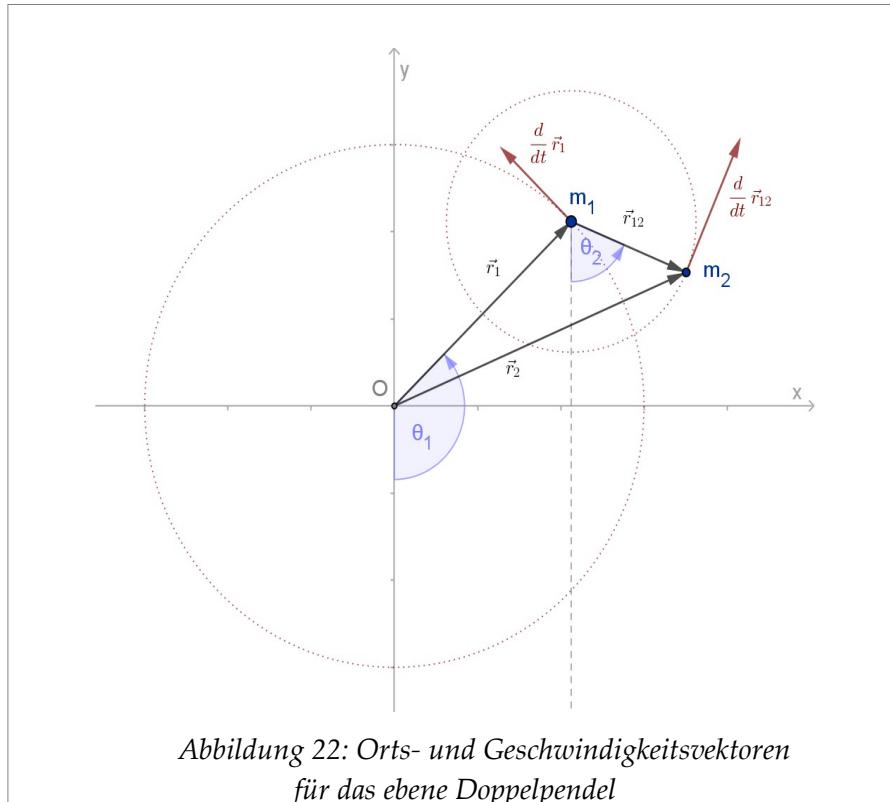
Die Energieerhaltung

$f_1(\vec{r}_1, t) = \vec{r}_1^2 - l_1(t)^2 = 0$	$\frac{d}{dt} f_1(\vec{r}_1, t) = 2 \vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_1, t) = 0$
$\frac{d}{dt} E(t) = -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}_1, t)$	$\frac{d}{dt} E(t) = 2\lambda_1 l_1(t) \dot{l}_1(t) \neq 0$

Der Drehimpuls

$\vec{p}_i = m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$	$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d}{dt} \vec{L}_i$
$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{K}_i$	$\vec{M}_i = -m_i g \vec{r}_i \times \hat{e}_y$
$\frac{d}{dt} \vec{L}_1 = \vec{M}_1 - 2\lambda_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$	$\frac{d}{dt} \vec{L}_2 = \vec{M}_2 + 2\lambda_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$
$\vec{L} = \sum_{i=1}^2 \vec{L}_i \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^2 \vec{M}_i$	$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$

C. Ausflug in die Zylinderkoordinaten



Die Einheitsvektoren

$\hat{e}_\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$	$\hat{e}_\theta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$	$\hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{r}(x, y, z) = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$		$\vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \hat{e}_\rho(\theta) + z \hat{e}_z$

Einige Skalar- und Kreuzprodukte

	$\Delta \theta = \theta_1 - \theta_2$
$\hat{e}_\rho(\theta_1) \cdot \hat{e}_\rho(\theta_2) = \cos \Delta \theta$	$\hat{e}_\theta(\theta_1) \cdot \hat{e}_\theta(\theta_2) = \cos \Delta \theta$
$\hat{e}_\rho(\theta_1) \times \hat{e}_\rho(\theta_2) = -\sin \Delta \theta \hat{e}_z$	$\hat{e}_\theta(\theta_1) \times \hat{e}_\theta(\theta_2) = -\sin \Delta \theta \hat{e}_z$
$\hat{e}_\rho(\theta_1) \cdot \hat{e}_\theta(\theta_2) = \sin \Delta \theta$	$\hat{e}_\rho(\theta_1) \times \hat{e}_\theta(\theta_2) = \cos \Delta \theta \hat{e}_z$
$\hat{e}_\rho(\theta) \cdot \hat{e}_\theta(\theta) = 0$	$\hat{e}_\rho(\theta) \times \hat{e}_\theta(\theta) = \hat{e}_z$
$\hat{e}_\rho(\theta) \times \hat{e}_x = -\cos \theta \hat{e}_z$	$\hat{e}_\theta(\theta) \times \hat{e}_x = -\sin(\theta) \hat{e}_z$
$\hat{e}_\rho(\theta) \times \hat{e}_y = \sin \theta \hat{e}_z$	$\hat{e}_\theta(\theta) \times \hat{e}_y = \cos(\theta) \hat{e}_z$

Die zeitlichen Ableitungen der Einheitsvektoren

$\dot{\hat{e}}_p(\theta) = \dot{\theta} \hat{e}_\theta(\theta)$	$\dot{\hat{e}}_\theta(\theta) = -\dot{\theta} \hat{e}_p(\theta)$	$\dot{\hat{e}}_z = \vec{0}$
---	--	-----------------------------

Die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren

$\vec{r}_1(\theta_1) = l_1 \hat{e}_p(\theta_1)$	$\vec{r}_{12}(\theta_2) = l_2 \hat{e}_p(\theta_2)$
$ \vec{r}_1(\theta_1) = l_1$	$ \vec{r}_{12}(\theta_2) = l_2$
$\vec{r}_2(\theta_1, \theta_2) = \vec{r}_1(\theta_1) + \vec{r}_{12}(\theta_2)$	$\vec{r}_2(\theta_1, \theta_2) = l_1 \hat{e}_p(\theta_1) + l_2 \hat{e}_p(\theta_2)$
	$ \vec{r}_2(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{l_1^2 + 2l_1l_2 \cos \Delta\theta + l_2^2}$
$\dot{\vec{r}}_1(\theta_1) = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{e}_\theta(\theta_1)$	$\dot{\vec{r}}_{12}(\theta_2) = l_2 \dot{\theta}_2 \hat{e}_\theta(\theta_2)$
$\dot{\vec{r}}_2(\theta_1, \theta_2) = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{e}_\theta(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{e}_\theta(\theta_2)$	
$\vec{r}_1(\theta_1) \times \vec{r}_2(\theta_1, \theta_2) = -l_1 l_2 \sin \Delta\theta \hat{e}_z$	

D. Rund um den Drehimpuls

<p>Der Drehimpuls \vec{L}_i eines Punktteilchens der Masse m_i am Orte \vec{r}_i mit dem Impuls ist definiert durch das vektorielle Kreuzprodukt aus Orts- und Impulsvektor.</p> <p>Der Gesamtdrehimpuls \vec{L} des Doppelpendels ergibt sich durch eine Summe über die Einzelteilchen. Bezugspunkt der Drehimpulse ist der Aufhängepunkt O des Doppelpendels.</p> <p>Das Drehmoment \vec{M}_i eines Punktteilchens der Masse m_i am Orte \vec{r}_i, auf dem eine Kraft \vec{K}_i wirkt, ist definiert durch das vektorielle Kreuzprodukt aus Orts- und Kraftvektor.</p> <p>Das Gesamtdrehmoment \vec{M}, das auf das Doppelpendel wirkt, ergibt sich durch eine Summe über die Einzelteilchen. Bezugspunkt des Drehmomentes ist der Aufhängepunkt O des Doppelpendels.</p> <p>Die zeitlichen Entwicklung des Drehimpulses wird durch das wirksame Drehmoment bestimmt.</p>	$\vec{p}_i = m \dot{\vec{r}}_i$ $\vec{L} = \sum_{i=1}^2 \vec{L}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ $\vec{K}_i = -m_i g \hat{e}_y$ $\vec{M} = \sum_{i=1}^2 \vec{M}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{K}_i$ $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$
---	--

Das Drehmoment

$\vec{M} = \sum_{i=1}^2 \vec{M}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{K}_i$	$\vec{K}_i = -m_i g \hat{e}_y$
$\vec{M}_1(\theta_1) = -m_1 l_1 g \sin \theta_1 \hat{e}_z$	$\vec{M}_2(\theta_1, \theta_2) = -m_2 g \{l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2\} \hat{e}_z$

$$\vec{M}(\theta_1, \theta_2) = \gamma_v \{ \sin \theta_1 + \mu \lambda \sin \theta_2 \} \hat{e}_z \quad \gamma_v = -(m_1 + m_2) l_1 g$$

Der Drehmomentvektor des Doppelpendels steht somit konstant senkrecht auf der Schwingungsebene.

Der Drehimpuls

$\vec{L} = \sum_{i=1}^2 \vec{L}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{p}_i$	$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$
$\Delta \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \gamma_L = (m_1 + m_2) l_1^2$	
$\vec{L}_1(\dot{\theta}_1) = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \hat{e}_z$	
$\vec{L}_2(\Delta \theta, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = m_2 \{ l_1^2 \dot{\theta}_1 + l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \Delta \theta + l_2^2 \dot{\theta}_2 \} \hat{e}_z$	
$\vec{L}(\Delta \theta, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \gamma_L \{ \dot{\theta}_1 + \mu \lambda (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \Delta \theta + \mu \lambda^2 \dot{\theta}_2 \} \hat{e}_z$	
$\frac{d}{dt} \vec{L}(\Delta \theta, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \gamma_L \{ \ddot{\theta}_1 + \mu \lambda (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \Delta \theta + \mu \lambda (\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2) \sin \Delta \theta + \mu \lambda^2 \ddot{\theta}_2 \} \hat{e}_z$	

Auch der Drehimpulsvektor des Doppelpendels steht somit senkrecht auf der Schwingungsebene, hier die x-y-Ebene.

E. Die Sonderfälle

Verschwindet Schwerkraft oder ist sie zu vernachlässigen, so gilt das auch für das Drehmoment $\vec{M}(t)=0$ mit der Folge, dass eine zweite Konstante der Bewegung ins Doppelpendelspiel kommt: der Gesamtdrehimpuls ist nach Betrag und Richtung eine Konstante $\vec{L}(t)=\vec{L}(0)$

Die Schwerkraft ist etwa zu vernachlässigen, wenn die kinetische Energie sehr groß wird und die potentielle Energie beschränkt bleibt⁸. Diesen Fall realisiert man einfach mit großen anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten.

Die Lösungen für all diese Fälle lassen sich mithilfe der konstanten Bewegungsgrößen durch eine direkte Integration gewinnen, worauf ich hier allerdings verzichte. Ich benutze auch für die Sonderfälle den oben abgeleiteten Lösungsweg mit Scilab.

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad \gamma_L = (m_1 + m_2)l_1^2 \quad \gamma_T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2$$

Die konstante Gesamtenergie für g=0

$$E(\Delta\theta, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \gamma_T [\dot{\theta}_1^2 + 2\mu\lambda \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \Delta\theta + \mu\lambda^2 \dot{\theta}_2^2] \equiv E_0$$

Der konstante Gesamtdrehimpuls für g=0

$$\vec{L}(\Delta\theta, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \gamma_L [\dot{\theta}_1 + \mu\lambda (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \Delta\theta + \mu\lambda^2 \dot{\theta}_2] \hat{e}_z \equiv L_0 \hat{e}_z$$

Für die nächste Abbildung 23 habe ich die Gravitationskonstante mit 0,981 auf ein Zehntel ihres Erdwertes reduziert und die Integrationszeit auf 80 s verdoppelt. Das leichtere Pendel braucht nun gut 55 s, bis es sein Hin- und Herschwingen so sehr aufgeschaukt hat, dass es Vollkreise durchlaufen kann. Der Bewegungstypus gegenüber Abbildung 9 ist aber unverändert.

Die übernächste Abbildung 24 setzt die Gravitationskonstante auf Null; damit sich das Pendel überhaupt in Bewegung setzt, wird die anfängliche Winkelgeschwindigkeit die schwerere Pendelmasse auf den hohen Anfangswert von 254 m/s² gesetzt. Der Bewegungstypus ist der einer im wesentlichen nur leicht gestörten periodischen Bewegung, beide Körper rotieren in Vollkreisen.

In der letzten Abbildung 25 wird die irdische Schwerkraft wieder in Kraft gesetzt und die schwerere Masse auf den sehr hohen Anfangswert von 1270 m/s² gesetzt. Wie zu erwarten bewegen sich beide Pendelmassen nun ganz ähnlich dem schwerelosen Fall der Abbildung 24.

(8) ... also die Pendelmassen beschränkt bleiben

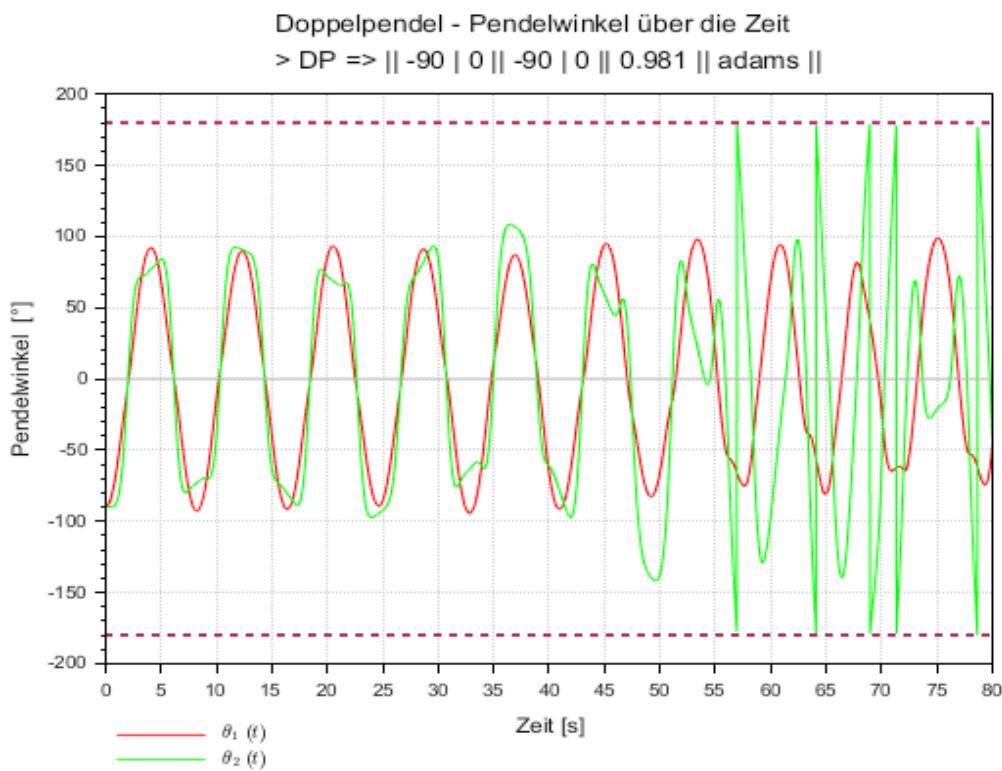


Abbildung 23: Verlauf der Pendelwinkel über die Zeit für 80 Sekunden

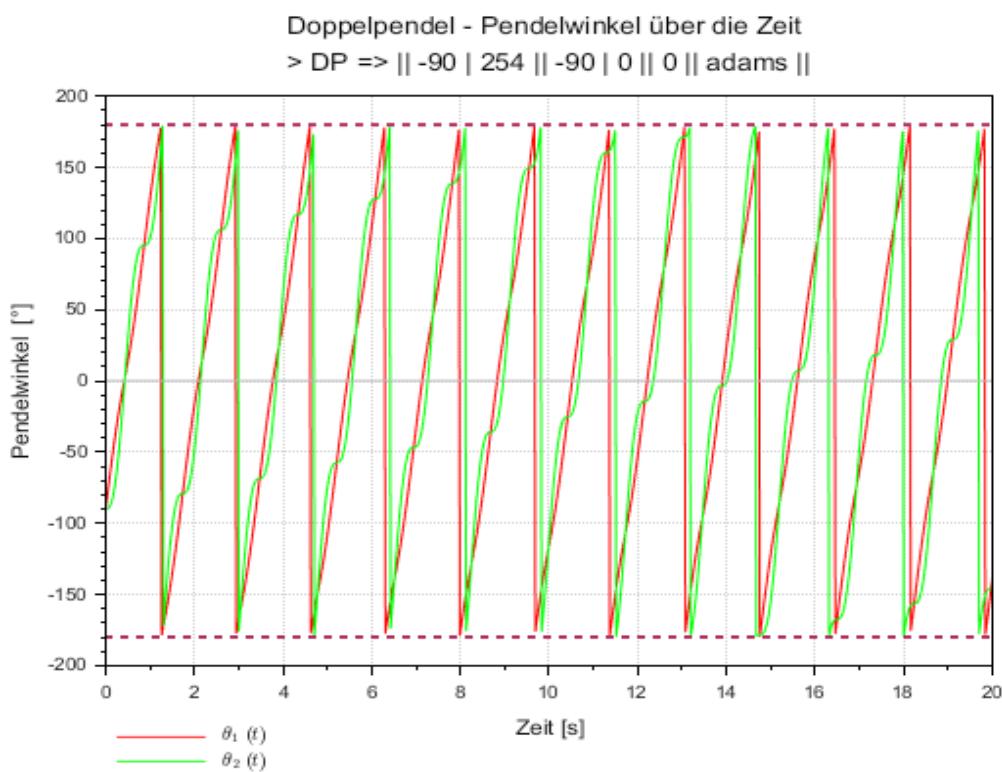


Abbildung 24: Verlauf der Pendelwinkel über die Zeit für 20 Sekunden

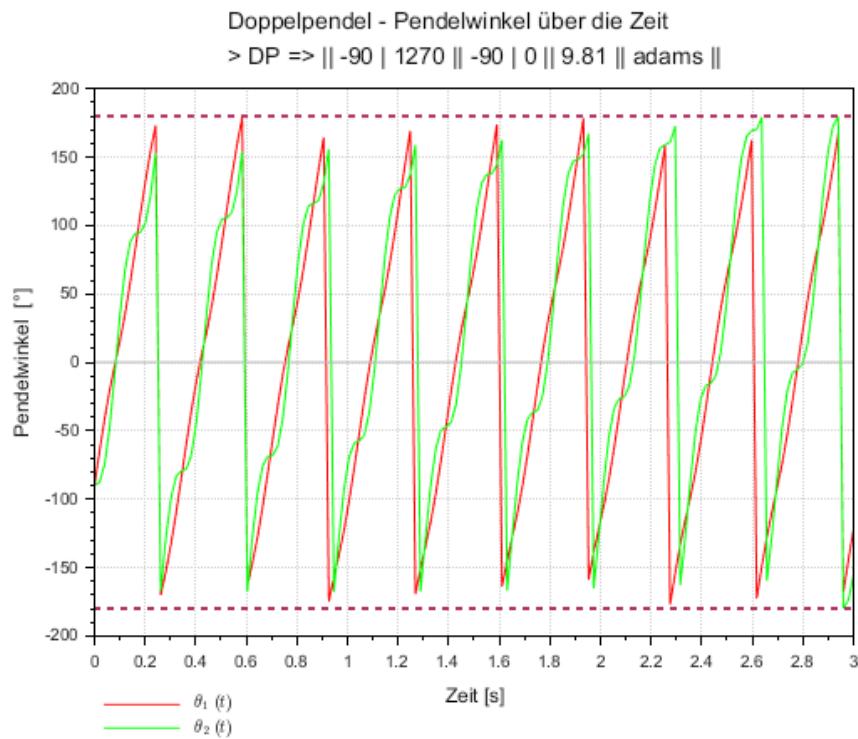


Abbildung 25: Verlauf der Pendelwinkel über die Zeit für 3 Sekunden